



**UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

Departamento de Física

**MODELO DE SEESAW INVERSO ESPONTANEO CON  
SIMETRIA GLOBAL  $U(1)_\ell$  LEPTONICA**

Tesina para optar al grado de Licenciado en Física con mención en  
Astronomía

**Eduardo Alfonso Salazar Torres**

Profesor Guía: Dr. Roberto Lineros R.

Antofagasta, Chile.  
Diciembre, 2025



# Agradecimientos

En este apartado, quiero agradecer profundamente a mi familia más cercana, mi mamá, papá, hermana, abuela materna, abuela paterna, tía materna y tío paterno, quienes me han apoyado emocionalmente y económicamente, durante todo el transcurso de la licenciatura. Sin ellos no podría estar donde estoy ahora, y espero poder en el futuro devolverles de alguna forma todo lo que me han ayudado.

También quiero agradecer a mis amistades, por el simple hecho de estar ahí en los mejores y peores momentos.

Finalmente, quiero agradecer enormemente a mi profesor guía Roberto Lineros, por su paciencia, tiempo y disposición total.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>1</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
1.1. Motivación . . . . .	2
1.2. Hipótesis . . . . .	3
1.3. Objetivos del trabajo . . . . .	3
1.3.1. Objetivos específicos . . . . .	3
1.4. Estructura de la tesina . . . . .	4
<b>2. Modelo Estándar</b>	<b>5</b>
2.1. Fermiones . . . . .	5
2.2. Bosones . . . . .	7
2.3. Teoría de grupos y simetrías . . . . .	7
2.4. Teorías de gauge . . . . .	10
2.4.1. Invarianza local de gauge $U(1)$ . . . . .	10
2.4.2. Invarianza local de gauge $SU(2)$ . . . . .	11
2.4.3. Invarianza local de gauge $SU(3)$ . . . . .	12
2.5. Ruptura espontánea de la simetría . . . . .	12
2.6. Mecanismo de Higgs . . . . .	13
2.7. El modelo estándar . . . . .	14
2.7.1. Leptones . . . . .	14
2.7.2. Quarks . . . . .	15
2.7.3. Bosón de Higgs . . . . .	16
2.7.4. Interacciones Fundamentales . . . . .	17
2.7.5. Interacción Fuerte $SU(3)_C$ . . . . .	18
2.7.6. Interacción Electromagnética $U(1)_{EM}$ . . . . .	18
2.7.7. Interacción débil $SU(2)_L$ . . . . .	18
2.7.8. Lagrangiano del modelo estándar . . . . .	19
<b>3. Neutrinos</b>	<b>21</b>
3.1. Historia . . . . .	21
3.2. Oscilación de neutrinos . . . . .	22
3.3. La masa de los neutrinos . . . . .	24
3.3.1. Términos de masa para neutrinos. . . . .	24
3.3.2. Mecanismo de Seesaw tipo I . . . . .	26



3.3.3. Mecanismo See-saw inverso mínimo . . . . .	26
<b>4. El modelo seesaw inverso con ruptura espontánea de la simetría <math>U(1)</math> leptónica</b>	<b>28</b>
4.1. Lagrangiano del modelo . . . . .	28
4.2. Sector escalar . . . . .	30
4.3. Diagonalización de la matriz de masa . . . . .	31
4.3.1. Diagonalización $M_{ps}^2$ . . . . .	32
4.3.2. Diagonalización $M_{es}^2$ . . . . .	32
4.4. Espacio de parámetros . . . . .	33
4.4.1. Espacio de masas de Seesaw Inverso . . . . .	34
4.4.2. Espacio de Yukawas y VEVs . . . . .	36
4.4.3. Espacio de acoplamientos $\lambda_i$ . . . . .	38
<b>5. Conclusiones y Trabajo futuro</b>	<b>42</b>
5.1. Conclusiones . . . . .	42
5.2. Trabajo Futuro . . . . .	43
<b>Anexo</b>	<b>46</b>
5.3. Matrices de Gell-Mann: . . . . .	46
5.4. Constantes de estructura: . . . . .	46
5.5. Transformación $SO(2)$ . . . . .	46
5.6. Lagrangiano $\mathcal{L}_Y$ . . . . .	47
5.7. Valores de $\psi_x$ y $\psi_s$ . . . . .	47
5.8. Valor del parámetro $A$ . . . . .	47

# Resumen

El modelo estándar (ME) presenta un marco teórico suficiente para poder entender la mayoría de la física de partículas, sin embargo, el ME tiene ciertas falencias, no explica como los neutrinos adquieren masa ni explica el origen de la materia oscura.

Por ello, existen modelos más allá del ME que buscan responder estas preguntas. En este trabajo, se estudia un modelo tipo Seesaw inverso (SI) con ruptura espontánea de una simetría leptónica global  $U(1)_\ell$ , cuyo propósito es generar de manera natural términos de masa para un neutrino activo del ME.

En este modelo se introducen en total 4 nuevas partículas al ME: dos neutrinos estériles con quiralidad derecha  $N_1$ ,  $N_2$ , y dos escalares  $S$ ,  $X$  singletes de  $SU(2)_L$  con carga leptónica y sin hipercarga, encargados de generar términos de masa luego del rompimiento espontáneo de la simetría  $U(1)_\ell$ . La introducción de los dos escalares al ME, modifica su potencial escalar, introduciendo distintos parámetros de interacción  $\lambda_{ij}$  y  $\lambda_i$ , que determinan la estructura que tendrán los autoestados de masa de los escalares y la aparición de un pseudo-escalar, el cual se evalúa como candidato a materia oscura.

A partir del lagrangiano del modelo, se construyen matrices de masa para los escalares y los neutrinos, las cuales se diagonalizan mediante los software de Mathematica y VScode en lenguaje Python, con el fin de obtener expresiones para los autoestados de masa, los cuales están sujetos a restricciones físicas tales como: la jerarquía de masa del modelo SI, la estabilidad del potencial, respetar el valor de la masa del Higgs, respetar valores plausibles de los Yukawas y los valores de expectación del vacío (VEVs).

Con ello, al muestrear un total de  $10^6$  puntos aleatorios que cumplan con las diversas restricciones, es posible acceder a diferentes espacios de parámetros que ilustran gráficamente las correlaciones que existen entre las variables.

Los resultados nos permiten identificar patrones y correlaciones entre las masas escalares, los acoplamientos y los VEVs, revelando figuras bien definidas donde el modelo reproduce una masa de neutrino compatible con las observaciones y un pseudo-escalar ligero candidato a materia oscura.

El análisis de los resultados ratifica la consistencia interna del modelo, además de confirmar su eficacia como una extensión mínima del ME capaz de explicar la masa de un neutrino mediante ruptura espontánea de la simetría.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

El ME de la física de partículas constituye un marco teórico exitoso para describir las interacciones fundamentales y las partículas elementales conocidas, su estructura basada en el grupo  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  permite explicar fenómenos electromagnéticos, débiles, fuertes, tanto como la generación de masa de distintas partículas, y a su vez, la predicción de partículas recientemente descubiertas experimentalmente, como el bosón de Higgs [1].

Sin embargo, el ME presenta limitaciones importantes:

- Masa de neutrinos: El ME, no tiene incorporado un mecanismo por el cual, los neutrinos adquieran masa, dejando a estas partículas como componentes no masivos, esto a pesar de que distintas experimentaciones realizadas en el SNO (Sudbury Neutrino Observatory) [2] o el super Kamiokande [3], muestran de manera inequívoca que mediante el mecanismo de oscilación de sabor, los neutrinos sí tienen masa.
- Materia oscura: El ME, no tiene incorporado ningún tipo de partícula que permita explicar la materia oscura. Esto a pesar de que constituye aproximadamente un 85 % de la materia del universo [4].

Por lo tanto, es necesario realizar una extensión al ME con el fin de resolver estas limitaciones.

Una de las extensiones más estudiadas para dar masa a los neutrinos es el mecanismo tipo Seesaw, con sus distintas variantes [5]. Estos modelos consisten en la adición de neutrinos con quiralidad diestra y singletes del ME que se acoplen a los neutrinos activos, generando así sus términos de masa.

Sin embargo, algunos de estos mecanismos Seesaw presentan una refutabilidad desafiante desde el punto de vista experimental y/o requieren escalas de energía muy altas como ocurre en el Seesaw tipo 1. Por ello, una alternativa viable puede ser el mecanismo de seesaw inverso (SI), el cual permite generar términos de masas pequeños para neutrinos activos sin la necesidad de postular neutrinos excesivamente pesados al modelo. No obstante, el SI solo permite introducir términos de masa los cuales carecen de un origen dinámico.

Una forma de justificar la aparición de estos términos de masa consiste en considerar la simetría global de número leptónico  $U(1)_\ell$  como una simetría fundamental del lagrangiano del ME, la cual, al romperse espontáneamente mediante la introducción de nuevos campos

escalares que adquieren valores de expectación del vacío distintos a cero, generan naturalmente términos de masa para los neutrinos del ME.

Esta alternativa resulta ser satisfactoria si consideramos además que, tras la ruptura espontánea de la simetría, se generan dos pseudo-escalares, de los cuales uno adquiere masa de manera natural, y podría ser un candidato a materia oscura.

Por lo tanto, la construcción de este tipo de modelo responde dos problemáticas que el ME por sí solo no puede resolver.

En este contexto, el presente trabajo estudia un modelo Seesaw inverso con ruptura espontánea de la simetría leptónica global  $U(1)_\ell$ , el cual introduce dos neutrinos estériles diestros  $N_1, N_2$  y dos campos escalares singletes  $S, X$  que actúan como singletes dentro del grupo de gauge que describe el ME.

## 1.2. Hipótesis

En este trabajo se propone que las masas de los neutrinos pueden generarse mediante un mecanismo SI, si la simetría  $U(1)_\ell$  accidental, se toma como una simetría fundamental que debe respetarse dentro del ME. De tal forma que, al romperse espontáneamente mediante valores de expectación del vacío distintos de cero, para los dos escalares singletes, permita de manera natural introducir términos de masa para al menos un neutrino activo del ME.

Además, el pseudo-escalar asociado a tal ruptura, podría considerarse como un candidato viable a materia oscura, si imponemos condiciones restrictivas para su masa y sus acoplamientos  $\lambda_i$  y  $\lambda_{ij}$  [6].

## 1.3. Objetivos del trabajo

### Objetivo general

Analizar el modelo SI con ruptura espontánea de la simetría  $U_\ell$ , determinando valores plausibles para las jerarquías de masas asociadas al modelo SI y expresiones para los autoestados de masa de los escalares y el pseudo-escalar, como funciones de sus parámetros de interacción  $\lambda_i$ .

### 1.3.1. Objetivos específicos

- Construir el lagrangiano del modelo, al incorporar los neutrinos diestros y los campos escalares  $S$  y  $X$  con una asignación de carga leptónica para respetar la simetría  $U(1)_\ell$ .
- Construir el potencial escalar del modelo, introduciendo por consecuencia, varios parámetros de interacción entre los nuevos campos y el Higgs del ME.
- Diagonalizar las matrices del sector escalar, con el fin de identificar autoestados de masa físicos y analizar sus dependencias paramétricas.
- Construir y analizar espacios de parámetros correspondientes a: los autoestados de masa del modelo SI, los acoplamientos de Yukawa relacionados al modelo SI, los valores de

expectación del vacío de los dos campos escalares  $S$  y  $X$ , los acoplamientos  $\lambda_i$  y  $\lambda_{ij}$ , los autoestados de masa de los escalares y el pseudo-escalar resultante.

## 1.4. Estructura de la tesina

Este trabajo se organiza mediante cinco capítulos. El primer capítulo consta de la introducción del trabajo, se presenta la motivación de la investigación, la hipótesis general del trabajo, el objetivo general y los objetivos específicos de la tesina y finalmente la estructura de la misma.

El segundo capítulo llamado Modelo Estándar, se presentan conceptos fundamentales relacionados a la física de partículas con el fin de establecer las bases que constituyen al ME como tal, para finalmente explicar en que consiste el ME e introducir su lagrangiano.

El tercer capítulo llamado Neutrinos, se revisa la historia del neutrino y el fenómeno de oscilación de neutrinos como prueba inequívoca de que los neutrinos tienen masa.

En cuarto capítulo llamado modelo Seesaw Inverso con ruptura espontánea de  $U(1)_\ell$ , se construye el lagrangiano del modelo, se analiza el sector escalar, se diagonalizan las matrices de masa para el sector escalar y además, se exploran numéricamente patrones y relaciones entre masas, acoplamientos, VEVs.

En el quinto y último capítulo, se presentan las conclusiones principales del trabajo y se comentan posibles líneas futuras de investigación.

Finalmente, el documento incluye una sección de bibliografía, donde se listan las referencias utilizadas en el trabajo, y un Anexo, en el cual se proporcionan expresiones auxiliares, cálculos complementarios y material adicional necesario para comprender el modelo.

# Capítulo 2

## Modelo Estándar

El modelo estándar es una teoría cuántica de campos que describe las partículas fundamentales que constituyen la materia y las interacciones que actúan sobre ellas. Una teoría cuántica de campos contiene un marco teórico que combina principios de la mecánica cuántica con principios de la relatividad especial, añadiendo el concepto de campo. Las partículas se consideran como excitaciones cuánticas de campos (espinoriales, escalares, vectoriales); por lo tanto una teoría cuántica de campos considera a los campos como elementos fundamentales que impregnan el espacio tiempo y evolucionan en este [7].

En la naturaleza, hay dos tipos de partículas fundamentales, clasificadas según el valor de su espín, los fermiones y los bosones. Cada una tiene un comportamiento dinámico característico, debido a las propiedades del campo que las describen.

### 2.1. Fermiones

Un tipo de partícula fundamental es el fermión; se caracteriza por cumplir con el principio de exclusión de Pauli y por lo tanto, obedecer la estadística de Fermi-Dirac además de contar con espín semi-entero [8].

Para el caso de partículas con espín 1/2, la dinámica se rige por la ecuación de Dirac, que es una ecuación la que hace compatible la descripción cuántica de una partícula con espín, junto con la relatividad especial de Einstein. La ecuación de Dirac viene dada por:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (2.1)$$

Donde  $m$  es la masa de la partícula;  $\partial_\mu$  es el operador derivada parcial, definido como  $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ ;  $\psi$  es un campo espinorial de cuatro componentes (espinor);  $\mu = 0, 1, 2, 3$  es el índice asociado a la métrica de Minkowski; y  $\gamma^\mu$  corresponde a las matrices de Dirac que satisfacen el álgebra de Clifford  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ . Una forma de describir al espinor es mediante la representación quirál:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Donde  $\psi_L$  corresponde a la componente quirál izquierda y  $\psi_R$  a la componente quirál derecha. Cabe mencionar que, en el transcurso del documento se optará por utilizar la notación

de unidades naturales, es decir,  $c = \hbar = 1$ . El término  $\gamma^\mu$ , en la representación quirál/Weyl, se expresan como:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

donde  $\sigma^\mu$  son las matrices de Pauli,

$$\sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]. \quad (2.4)$$

También es conveniente mencionar la matriz  $\gamma^5$ ,

$$\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} -\mathbb{I}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

pues con esta matriz podemos definir los proyectores derechos e izquierdos,

$$P_R = \frac{\mathbb{I} + \gamma^5}{2}, \quad P_L = \frac{\mathbb{I} - \gamma^5}{2}, \quad (2.6)$$

los cuales permiten descomponer un espinor en sus componentes de quiralidad izquierda y derecha.

$$\psi_R = P_R \psi \quad \psi_L = P_L \psi \quad (2.7)$$

permitiendo representar un espinor en sus partes quirales,

$$\psi = \psi_R + \psi_L \quad (2.8)$$

Es posible definir densidades lagrangianas asociadas a distintos tipos de campos, siempre y cuando, sea posible reconstruir la ecuación de movimiento asociada al campo, mediante el uso de la ecuación de Euler-lagrange:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.9)$$

donde  $\mathcal{L}$  corresponde a la densidad lagrangiana; y  $\phi_i$  corresponde a los campos del sistema.

Por lo tanto, se define el lagrangiano de Dirac:

$$\mathcal{L} = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \quad (2.10)$$

Donde tratamos  $\psi$  y  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  como campos independientes. Al aplicar la ecuación de Euler-Lagrange 2.9 a cada uno de ellos, se obtienen las ecuaciones de movimiento correspondientes a  $\psi$  y su adjunta  $\bar{\psi}$ , de esta manera se recupera la ecuación de Dirac 2.1 [9].

## 2.2. Bosones

Otro tipo de partícula fundamental en la naturaleza son los bosones; se caracterizan por no obedecer el principio de exclusión de Pauli y regirse por la estadística de Bose-Einstein y además, cuentan con espín entero [10]. El caso más simple es el bosón cuyo espín es igual a cero, el cual se denomina como bosón escalar, la dinámica de este tipo de partícula se describe mediante la ecuación de Klein-Gordon (KG),

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi = 0 \quad (2.11)$$

donde  $\phi$  es un campo escalar con masa  $m$ . La ecuación de KG se obtiene al imponer que la relación relativista de energía y momento se mantenga en el régimen cuántico [11]. Además, a partir del lagrangiano de KG,

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (2.12)$$

es posible recuperar la ecuación de movimiento 2.11, si se aplica la ecuación de Euler-Lagrange 2.9 al lagrangiano de KG 2.12.

El bosón cuyo espín es igual a uno se denomina bosón vectorial; la dinámica de este tipo de partícula se describe mediante la ecuación de Proca,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0, \quad \text{con} \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (2.13)$$

donde  $A^\mu$  es un campo vectorial con masa  $m$ . Al igual que en los casos anteriores, existe un lagrangiano asociado a estos campos,

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu, \quad (2.14)$$

el cual, si lo insertamos en la ecuación de Euler-Lagrange 2.9, obtenemos su ecuación de movimiento asociada; en este caso, la ecuación de Proca 2.13 [9].

## 2.3. Teoría de grupos y simetrías

Una simetría es una transformación que actúa sobre un sistema, dejándolo invariante. Esto implica que, después de aplicar la transformación, todas las cantidades físicas relevantes permanecen indistinguibles de su configuración original. Gracias al teorema de Noether, sabemos que cada simetría (continua y diferenciable) de la naturaleza conlleva una ley de conservación o al revés, que cada ley de conservación refleja una simetría subyacente como se ilustra en la tabla 2.1. Por ejemplo, las leyes de la física son simétricas con respecto a traslaciones temporales, el teorema de Noether establece que esta invarianza implica la conservación de energía, si un sistema es invariante ante traslaciones espaciales, entonces el momento lineal es conservado, si un sistema es simétrico ante rotaciones alrededor de un punto, entonces el momento angular es conservado. De manera similar, la invarianza de las leyes de Maxwell ante transformaciones de gauge, conlleva la conservación de carga eléctrica.



Simetría	Ley de conservación
Traslación en el tiempo	Energía
Traslación en el espacio	Momento lineal
Rotación	Momento angular
Transformación de gauge	Carga

Tabla 2.1: Relación entre simetría y ley de conservación (Teorema de Noether).

Es importante resaltar la relación que hay entre la teoría de grupos y las simetrías pues, de manera general, la teoría de grupos proporciona un marco teórico matemático adecuado para clasificar las simetrías físicas; Cada conjunto de transformaciones (representadas como matrices) que puede dejar invariante un sistema forma un grupo que tendrá ciertas propiedades, dependiendo de la naturaleza de la simetría en cuestión [9].

## Grupos de Lie

Un grupo de Lie es un grupo tal que las operaciones de multiplicación e inversa, dependen de manera continua y diferenciable de uno o más parámetros reales. Si un sistema, al aplicarle las transformaciones asociadas a los elementos de un grupo de Lie, permanece indistinguible del sistema original, se dice que el sistema tiene una simetría continua con respecto a ese grupo. Existen varios tipos de grupos continuos en física que pueden señalar una simetría subyacente

- Grupo  $U(n)$ : Corresponde a la colección de todas las matrices unitarias  $n \times n$ , es decir, que cumplen que la matriz inversa corresponde a la matriz conjugada hermítica  $U^{-1} = U^\dagger$ .
- Grupo  $O(n)$ : Corresponde a la colección de todas las matrices  $n \times n$  ortogonales, es decir, que sus inversas son equivalentes a sus transpuestas  $O^{-1} = O^T$ .
- Grupo  $SU(n)$ : Corresponde a la colección de todas las matrices unitarias y especiales  $n \times n$ , que una matriz sea especial quiere decir que su determinante es igual a uno.
- Grupo  $SO(n)$ : Corresponde a la colección de todas las matrices ortogonales y especiales  $n \times n$  [9].

Existen tres grupos de Lie relevantes en física de partículas para explicar las interacciones fundamentales:

- $U(1)_x$ : Siguiendo la definición anterior del caso genérico  $U(n)$ , las matrices  $1 \times 1$  que cumplen con la definición de grupo especial, se expresan como una exponencial multiplicada por una fase real:

$$U = e^{i\theta_x} \quad \text{con} \quad U^\dagger U = I \quad (2.15)$$

Por lo tanto, si un sistema queda invariante ante tal transformación, implica que tiene simetría  $U(1)$ .

$$e^{i\theta_x} \psi = \psi \quad (2.16)$$

- $SU(2)_x$ : Cualquier matriz unitaria puede ser escrita en general, de la forma

$$U = e^{iH} \quad (2.17)$$

Donde  $H$  es hermítica  $H^\dagger = H$ , la matriz hermítica  $2 \times 2$  más general puede ser expresada en terminos de cuatro números reales  $a_1, a_2, a_3, \theta$ ,

$$H = \theta I + \vec{\tau} \cdot \vec{a} \quad (2.18)$$

Donde  $I$  es la identidad  $2 \times 2$  y  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  son las matrices de Pauli presentes en las ecuaciones 2.4 (en este caso, se usa la notación  $\tau$  en vez de  $\sigma$  pero son las mismas matrices). Cualquier matriz unitaria  $2 \times 2$  puede expresarse como:

$$U = e^{i\theta_x} e^{i\vec{\tau} \cdot \vec{a}_x} \quad (2.19)$$

Para cumplir con la condición de matriz especial  $\det U = 1$ ,  $\theta_x$  debe ser igual a cero. De esta forma, si un sistema es invariante ante una transformación  $SU(2)$  se dice que tiene simetría  $SU(2)$ ; esto es:

$$e^{i\vec{\tau} \cdot \vec{a}} \psi = \psi \quad (2.20)$$

- $SU(3)_x$ : Siguiendo la definición de un grupo unitario  $n \times n$ , es posible construir las matrices unitarias  $3 \times 3$ . Una matriz hermítica  $3 \times 3$  puede expresarse en términos de nueve parámetros reales  $a_1, a_2 \dots a_8, \theta$ :

$$H = \theta I + \lambda \cdot a \quad (2.21)$$

donde  $I$  es la matriz identidad  $3 \times 3$  y  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_8$ , son las matrices de Gell-Mann presentes en el anexo 5.3; y el producto punto denota

$$\lambda \cdot a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_8 a_8 \quad (2.22)$$

esto implica que,

$$U = e^{i\theta_x} e^{i\lambda \cdot a_x} \quad (2.23)$$

Para cumplir con la condición de matriz especial  $\det U = 1$ ,  $\theta_x$  debe ser igual a cero. Entonces, si un sistema es invariante ante una transformación,

$$e^{i\lambda \cdot a_x} \psi = \psi \quad (2.24)$$

se dice que tiene simetría  $SU(3)$  [9].

También existen simetrías discretas, es decir que describen cambios no continuos en un sistema, es conveniente mencionar directamente las simetrías discretas importantes para una teoría cuántica de campos:

- **Paridad**: Antes de 1956, se daba por garantizado que las leyes de la física eran ambidiestras es decir, la imagen espejo de cualquier proceso físico representaba un proceso completamente posible, sin embargo sabemos que esto no es cierto debido al

experimento de Wu en 1957 [12]. La simetría de paridad es una transformación  $\hat{P}$  que invierte las coordenadas espaciales de un sistema físico

$$\hat{P}\psi(x) = \psi(-x) \quad (2.25)$$

Además se cumple  $\hat{P}^2 = I_{n \times n}$ . Si un sistema físico permanece invariante ante tal operación, se dice que conserva paridad, en lenguaje de teoría de grupos podemos pensar que el grupo paridad consiste en el operador  $\hat{P}$  y la matriz  $I_{n \times n}$

- **Conjugación de carga:** Similar al caso anterior, existe un operador  $\hat{C}$  que cambia el signo de todas las cargas de los campos de un sistema. Puede entenderse como que el operador paridad transforma una partícula en su correspondiente antipartícula.

$$\hat{C}\psi = \bar{\psi} \quad (2.26)$$

Además el operador cumple  $\hat{C}^2 = I_{n \times n}$ . Sistemas que queden invariantes ante tal transformación se dice que son simétricos ante conjugación de carga

- **Reversión temporal:** La simetría temporal está asociada al operador  $\hat{T}$  que cambia el signo a la componente temporal de un sistema de la siguiente forma

$$\hat{T}\psi(x, t) = \psi(x, -t) \quad (2.27)$$

Nótese que el operador es anti lineal, por eso si consideramos campos cuánticos debemos conjugar el campo si operamos  $\hat{T}$ . Sistemas que queden invariantes ante tal transformación se dice que son simétricos ante reversión temporal [9].

## 2.4. Teorías de gauge

Las teorías de gauge describen todas las interacciones fundamentales de la física de partículas (exceptuando la gravedad); si tomamos, por ejemplo, la transformación  $U(1)_x$  definida anteriormente, nuestra fase  $\theta$  se entiende como una fase global, esto quiere decir que no depende de las coordenadas de espacio-tiempo  $x_\mu = x$ . En cambio, si  $\theta = \theta(x)$ , se dice que la fase es local. Si un sistema queda invariante ante una transformación cuya fase depende de  $x$ , se dice que cumple con el principio de invarianza local de gauge. Una teoría que cumple con dicho principio se denomina teoría de gauge.

### 2.4.1. Invarianza local de gauge $U(1)$

Tomemos como ejemplo el lagrangiano de Dirac presente en la ecuación 2.10, se puede notar que dicho objeto es invariante ante la transformación  $U(1) = e^{i\theta}$ , no obstante, si  $\theta$  depende de las coordenadas espacio temporales  $x$ , el lagrangiano no es invariante, pues debido al operador derivada parcial, se introduce un nuevo término al lagrangiano, tal que:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - \partial_\mu \theta \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (2.28)$$

Por lo tanto, si consideremos la siguiente transformación:

$$U_q = e^{-iq\lambda(x)} \quad \text{donde} \quad \lambda(x) = -\frac{\theta(x)}{q} \quad (2.29)$$

donde  $q$  es una constante de acoplamiento que fija la intensidad con la que el campo vectorial  $B_\mu$  interactúa con los campos que transforman bajo la simetría  $U(1)_q$ . Para imponer invarianza local, se reemplaza la derivada ordinaria del lagrangiano por la derivada covariante,

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + iqB_\mu \quad (2.30)$$

donde se introduce un nuevo campo vectorial  $B_\mu$  sin masa.

El lagrangiano de Dirac por lo tanto, se le debe introducir la parte cinética de este nuevo campo vectorial, y como se mencionó anteriormente, los campos vectoriales tienen un lagrangiano de Proca descrito por la ecuación 2.14. De esta forma el lagrangiano de Dirac con invarianza local:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \quad \text{con} \quad B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (2.31)$$

De esta manera se define un nuevo lagrangiano que es invariante localmente ante  $U(1)_q$  [9].

### 2.4.2. Invarianza local de gauge $SU(2)$

Sea la transformación  $SU(2)$  local de la forma,

$$S = e^{-ig\vec{\tau} \cdot \vec{\lambda}(x)} \quad \text{con} \quad \vec{\lambda}(x) = -\frac{\vec{a}(x)}{g} \quad (2.32)$$

donde  $g$  correspondería a una constante de acoplamiento. Suponiendo que tenemos dos campos con espín 1/2,  $\psi_1$  y  $\psi_2$ , que tienen la misma masa  $m$ , el lagrangiano del sistema se puede escribir de manera compacta utilizando que:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

por lo tanto, el lagrangiano,

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi$$

es idéntico al lagrangiano de Dirac presente en la ecuación 2.10, sin embargo, ahora  $\psi$  es un vector columna de dos elementos. Tal objeto es invariante ante una transformación  $SU(2)$  globalmente, es posible hacer que nuestro lagrangiano sea invariante localmente si redefinimos la derivada ordinaria como una derivada covariante de la forma:

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + ig\vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu \quad (2.34)$$

Introduciendo, como consecuencia, tres nuevos campos vectoriales  $W_\mu = (W_1^\mu, W_2^\mu, W_3^\mu)$  sin masa, los cuales tienen sus respectivos lagrangianos de Proca sin masa asociados, que se deben introducir al lagrangiano inicial, de esta forma:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} \quad (2.35)$$

Donde el índice  $a = 1, 2, 3$ , es para los tres campos vectoriales  $W_\mu$ . Cabe mencionar que la invarianza local nos obliga a redefinir el producto de los tensores  $W^{\mu\nu}$  de la forma:

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \quad (2.36)$$

donde  $\epsilon^{abc}$  corresponde al tensor de Levi-civita. De esta forma el lagrangiano resultante, es invariante localmente ante una transformación  $SU(2)_g$  y, representa dos campos de Dirac con igual masa en interacción con tres campos vectoriales sin masa.

### 2.4.3. Invarianza local de gauge $SU(3)$

Continuando con la misma idea del caso anterior, un lagrangiano de Dirac que describe tres campos de igual masa  $\psi_r, \psi_b, \psi_g$ , se pueden condensar en un solo vector columna:

$$\mathcal{L} = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \quad \text{con} \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_b \\ \psi_g \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

Dicho lagrangiano es invariante ante una transformación global  $SU(3)$ . Si queremos imponer invarianza local, consideremos la siguiente transformación:

$$S = e^{-ig_c \vec{\lambda} \cdot \vec{\phi}(x)} \quad \text{con} \quad \vec{\phi}(x) = -\frac{\vec{a}(x)}{g_c} \quad (2.38)$$

Donde  $g_c$  corresponde a una constante de acoplamiento, luego, reemplazamos la derivada ordinaria del lagrangiano por su derivada covariante:

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + i g_c \vec{\lambda} \cdot \vec{G}_\mu \quad (2.39)$$

Lo que introduce 8 campos vectoriales  $G_\mu$  que luego veremos que corresponden a los gluones. Estos 8 nuevos campos introducen sus términos cinéticos de Proca al lagrangiano, resultando en:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \quad (2.40)$$

Donde se debe redefinir el tensor que describe el término cinético de los campos vectoriales,

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_c f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c \quad (2.41)$$

donde,  $f^{abc}$  corresponde las constantes de estructura del grupo  $SU(3)$  presentes en el anexo 5.4. De esta forma, el lagrangiano resultante es invariante localmente ante una transformación  $SU(3)_g$  y, representa tres campos de Dirac con igual masa en interacción con ocho campos vectoriales sin masa. [9]

## 2.5. Ruptura espontánea de la simetría

Sea un lagrangiano de la forma,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1) (\partial^\mu \phi_1) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2) (\partial^\mu \phi_2) + \frac{1}{2} \mu^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{4} \lambda^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 \quad (2.42)$$

Donde, se describe dos campos escalares  $\phi_1, \phi_2$  y  $\mu$  con  $\lambda$  son dos constantes reales. Tal lagrangiano es invariante ante transformaciones de  $SO(2)$  descritas en el anexo 5.5.

Es posible, expresar su energía cinética como,

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)(\partial^\mu \phi_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)(\partial^\mu \phi_2) \quad (2.43)$$

menos su energía potencial,

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{1}{4}\lambda^2(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 \quad (2.44)$$

Al minimizar este potencial respecto a  $\phi_1^2$  y  $\phi_2^2$ , se obtiene que su mínimo ocurre para:

$$\phi_{1,min}^2 + \phi_{2,min}^2 = \frac{\mu^2}{\lambda^2} \quad (2.45)$$

Donde, de manera arbitraria, es posible escoger un estado fundamental o valor de expectación del vacío (VEV) distinto a cero, que permita minimizar el potencial, tal que:

$$\phi_{1,min} = \frac{\mu}{\lambda}, \quad \phi_{2,min} = 0 \quad (2.46)$$

Además, es posible introducir nuevos campos que son fluctuaciones alrededor de este VEV,

$$\eta = \phi_1 - \frac{\mu}{\lambda}, \quad \xi = \phi_2 \quad (2.47)$$

Se puede reescribir el lagrangiano en función de estos nuevos campos,

$$\mathcal{L} = \left[ \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \mu^2 \eta^2 \right] + \left[ \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi) \right] \quad (2.48)$$

$$- \left[ \mu\lambda(\eta^3 + \eta\xi^2) + \frac{\lambda^2}{4}(\eta^4 + \xi^4 + 2\eta^2\xi^2) \right] + \frac{\mu^4}{4\lambda^2} \quad (2.49)$$

Donde se puede observar que hay un término de masa para  $\eta$ ,

$$m_\eta = \sqrt{2}\mu \quad (2.50)$$

el cual, se deduce de la comparación con el lagrangiano de KG presente en la ecuación 2.12, no obstante el campo  $\xi$  queda sin masa, este tipo de campos se denominan bosones de Nambu-Goldstone, siempre aparecen cuando una simetría global continua se rompe espontáneamente, en este caso, la simetría que se rompió espontáneamente fue  $SO(2)$ , pues podemos notar que el lagrangiano 2.49 ya no es simétrico ante tal grupo. Se dice que la ruptura fue espontánea porque no hubo un agente externo que la rompiera; se rompe al escoger un valor arbitrario de expectación del vacío (VEV) [9].

## 2.6. Mecanismo de Higgs

El mecanismo de Higgs consiste en la ruptura espontánea de la simetría, pero en el caso de una simetría invariante localmente, como en el caso de las simetrías de gauge. Es de hecho mediante este mecanismo, por el cual todas las partículas del modelo estándar masivas adquieren su masa, tales como: todos los fermiones cargados y los bosones vectoriales  $W^\pm$  y  $Z^0$ .

## 2.7. El modelo estándar

El modelo estándar es la teoría que actualmente describe las partículas fundamentales que constituyen la materia y las interacciones que actúan sobre ellas. Se basa principalmente en una teoría cuántica de campos relativista, con varias simetrías locales de gauge involucradas, que se pueden condensar en un único grupo, el grupo del ME,

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$$

Este grupo de simetrías, fueron descritas de manera general en los apartados de invarianza local de gauge 2.31, 2.35 y 2.40. Para el caso particular del grupo del ME,  $SU(3)_c$  tiene asociada la constante de acoplamiento  $g_c$ ,  $SU(2)_L$  la constante de acoplamiento  $g$  y para el grupo  $U(1)_Y$  está asociada la constante de acoplamiento  $g'$ . Los subíndices  $C, L$  e  $Y$  en el grupo indican la carga de color, la quiralidad zurda sobre la que actúa  $SU(2)$  y la hipercarga asociada a  $U(1)_Y$  respectivamente. Para el caso de la hipercarga y tercera componente de isospín, existe la relación de Gell-Mann-Nishijima.

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \quad (2.51)$$

La cual nos relaciona la carga eléctrica de una partícula, con su tercera componente de isospín e hipercarga.

### 2.7.1. Leptones

Dentro del ME, existen seis tipos de **leptones**, los cuales son partículas fermiónicas que se pueden separar por tres generaciones como se muestra en la tabla 2.2, donde cada generación leptónica constituye un doblete leptónico izquierdo, cuyo lagrangiano que lo describe es invariante ante transformaciones del grupo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , dicho doblete se conforma de una partícula cargada eléctricamente con quiralidad zurda, como  $e^-$ ,  $\mu^-$ ,  $\tau^-$  y su neutrino asociado zurdo,  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\nu_\tau$ . Dichos dobletes, poseen carga de isospín  $I = \frac{1}{2}$  e hipercarga  $Y_L = -1$ .

$$L_i = \begin{pmatrix} \nu_{iL} \\ e_{iL} \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.52)$$

Donde  $i = 1, 2, 3$  corresponde a las generaciones leptónicas presentes en la tabla 2.2. Dentro del doblete, la componente asociada al neutrino tiene valor de la tercera componente de isospín  $I_3(\nu_{iL}) = +1/2$  mientras que la componente cargada tiene como tercera componente de isospín  $I_3(e_{iL}) = -1/2$ , lo que mantiene coherencia con la relación 2.51. Además, existen leptones cargados eléctricamente con quiralidad diestra, pero son singletes de  $SU(2)_L$  con isospín nulo e hipercarga  $Y_{eR} = -2$ , en este documento se escribirán de la forma:

$$e_{iR} \quad \text{singlete leptónico diestro} \quad (2.53)$$

donde  $i$ , en este caso, representa a los sabores leptónicos que corresponden a electrónico, muónico y tauónico. El ME no contiene neutrinos diestros, por lo tanto, no existen singletes diestros del tipo neutrino. También, cabe mencionar que los leptones no poseen carga de

Leptón	$Q$	$I_3$	$Y$	$\mathbf{L}_e$	$\mathbf{L}_\mu$	$\mathbf{L}_\tau$
<i>Primera generación</i>						
$e_L$	-1	-1/2	-1	1	0	0
$e_R$	-1	0	-2	1	0	0
$\nu_{eL}$	0	+1/2	-1	1	0	0
<i>Segunda generación</i>						
$\mu_L$	-1	-1/2	-1	0	1	0
$\mu_R$	-1	0	-2	0	1	0
$\nu_{\mu L}$	0	+1/2	-1	0	1	0
<i>Tercera generación</i>						
$\tau_L$	-1	-1/2	-1	0	0	1
$\tau_R$	-1	0	-2	0	0	1
$\nu_{\tau L}$	0	+1/2	-1	0	0	1

Tabla 2.2: Clasificación leptónica del Modelo Estándar, incluyendo las cargas  $Q$ ,  $I_3$ ,  $Y$  y los números leptónicos.

color, por lo tanto, se consideran singletes con respecto al grupo  $SU(3)_C$ . Cada leptón, tiene números cuánticos asociados en adición a los ya mencionados, tales como su número leptónico (electrónico, muónico y tauónico) y carga eléctrica .

A su vez, existen 6 leptones más correspondientes a las antipartículas asociadas a las partículas mostradas en la tabla 2.2, cuyos números cuánticos asociados son los mismos, pero con signo cambiado.

### 2.7.2. Quarks

También existe otro grupo de fermiones, los quarks, hay seis tipos de sabores de quarks, los cuales se clasifican por el valor de sus números cuánticos asociados a los sabores up, down, strange, charm, top y bottom. Al igual que los leptones, forman dobletes zurdos de  $SU(2)_L$  entre generaciones, dichos dobletes tienen hipercarga  $Y_{QL} = 1/3$  e isospín  $I = 1/2$ ,

$$q_{iL} = \begin{pmatrix} u_{iL} \\ d_{iL} \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.54)$$

donde  $i = 1, 2, 3$  representa las generaciones de quarks presente en la tabla 2.3. Donde, de manera similar a los leptones, se tienen los valores de la tercera componente de isospín,  $I_3(u_{iL}) = +1/2$ , mientras que  $I_3(d_{iL}) = -1/2$ . También, existen quarks que son singletes diestros del grupo  $SU(2)_L$ ,

$$u_{iR}, \quad \text{con hipercarga } Y_{uR} = \frac{4}{3}, \quad d_{iR}, \quad \text{con hipercarga } Y_{dR} = -\frac{2}{3} \quad (2.55)$$

Cabe mencionar que, al igual que en el caso de los leptones, existen las antipartículas de los quarks, que son el mismo quark pero con sus números cuánticos mostrados en la tabla 2.3 invertidos en signo. Otra particularidad de los quarks es que, a diferencia de los leptones, los



quarks portan la carga de color, la cual se clasifica en tres tipos: rojo, verde y azul. Por lo tanto, los quarks dentro del ME se consideran tripletes de  $SU(3)_C$  esto es,

$$q_i = \begin{pmatrix} q_r \\ q_g \\ q_b \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

Donde  $i$ , en este caso se refiere a los seis sabores de quarks existentes. Esto implica que el número total de quarks pertenecientes al modelo estándar es de 36.

Quark	$Q$	$I_{3L}$	$I_{3R}$	$Y_L$	$Y_R$
<i>Primera generación</i>					
$u$	$+2/3$	$+1/2$	$0$	$+1/3$	$+4/3$
$d$	$-1/3$	$-1/2$	$0$	$+1/3$	$-2/3$
<i>Segunda generación</i>					
$c$	$+2/3$	$+1/2$	$0$	$+1/3$	$+4/3$
$s$	$-1/3$	$-1/2$	$0$	$+1/3$	$-2/3$
<i>Tercera generación</i>					
$t$	$+2/3$	$+1/2$	$0$	$+1/3$	$+4/3$
$b$	$-1/3$	$-1/2$	$0$	$+1/3$	$-2/3$

Tabla 2.3: Quarks del ME y sus números cuánticos: carga eléctrica  $Q$ , isospín débil  $I_3$  e hipercarga  $Y$  para las componentes quirales izquierda y derecha.

### 2.7.3. Bosón de Higgs

Además, dentro del ME hay una partícula fundamental, el bosón de Higgs, dicha partícula es un bosón escalar cuyo espín tiene valor igual a cero. Este campo se introduce como un doblete escalar complejo de  $SU(2)_L$  con hipercarga  $Y = 1$ .

$$H = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

donde la componente  $\phi^+$  corresponde a la parte cargada eléctricamente del Higgs mientras que  $\phi^0$  corresponde a la parte neutra. El bosón de Higgs, es la partícula responsable de generar la masa de los bosones débiles que aparecen al imponer local la simetría  $SU(2)_L$  [2.35](#), y además, generar masas para todos los fermiones del ME, esto es mediante la ruptura espontánea de la simetría  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . La dinámica del bosón se describe mediante su término cinético y su potencial escalar,

$$V(H) = -\mu^2 H^\dagger H + \lambda (H^\dagger H)^2 \quad (2.58)$$

donde  $\mu$  y  $\lambda$  son constantes reales. El potencial escalar del Higgs corresponde al término más general renormalizable e invariante bajo la simetría  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . Además, el signo negativo de  $\mu^2$  asegura que el potencial posea un mínimo no trivial, lo que permite obtener

un VEV no nulo para el campo. Al escoger un VEV distinto a cero que minimice el potencial, el campo adquiere el valor,

$$\langle H \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

con  $v \approx 246$  GeV. Tal VEV, rompe espontáneamente la simetría  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  dando paso a la simetría  $U(1)_{EM}$  relacionada al electromagnetismo y la carga eléctrica. Además, los bosones vectoriales que aparecían naturalmente al imponer una simetría  $SU(2)$  local en el apartado 2.35, se transforman en los bosones débiles  $W^\pm$  y  $Z$  que se relacionan de la siguiente forma,

$$W_\mu^+ = \frac{W_\mu^1 - iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \quad (2.60)$$

$$W_\mu^- = \frac{W_\mu^1 + iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \quad (2.61)$$

$$Z_\mu = \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu \quad (2.62)$$

$$A_\mu = \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu. \quad (2.63)$$

Donde  $\theta_W$ , corresponde al ángulo de Weinberg y se definen las relaciones trigonométricas,

$$\cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (2.64)$$

donde  $g'$  corresponde a la constante de acoplamiento asociada a la hipercarga y  $g$  corresponde a la constante de acoplamiento de interacción débil.

Es importante resaltar que el valor del VEV del Higgs  $v \approx 246$  GeV se determina experimentalmente. Pues, al introducir tal valor de VEV al término cinético del Higgs, los campos adquieren términos de masa:

$$m_W = \frac{1}{2}gv, \quad m_Z = \frac{1}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}v \quad (2.65)$$

Por lo tanto, midiendo experimentalmente  $m_W$  y  $m_Z$ , y conociendo los valores de los acoplamientos  $g$  y  $g'$ , se obtiene que el vev del Higgs debe ser  $v \approx 246$  GeV.

#### 2.7.4. Interacciones Fundamentales

Hasta donde sabemos, existen sólo cuatro interacciones fundamentales en la naturaleza: Fuerte, electromagnética, débil y gravitacional. El ME, describe tres interacciones fundamentales, dejando de lado la interacción gravitacional, dicha interacción, se describe mediante la teoría de la relatividad general de Einstein. Además, cada interacción tiene una teoría cuántica relativista que la describe adecuadamente. También, dentro del ME, cada interacción fundamental tiene una partícula mediadora de la interacción asociada, las partículas mediadoras, cumplen con la particularidad de ser partículas con espín de valor 1, es decir son bosones vectoriales. Dichas partículas, aparecen de manera natural en el ME cuando imponemos que una simetría global sea local, de ahí nace la relación entre las simetrías y las interacciones fundamentales dentro del ME.

### 2.7.5. Interacción Fuerte $SU(3)_C$

La interacción fuerte está descrita por la cromodinámica cuántica (QCD), las únicas partículas que interactúan fuertemente, son las partículas que tienen carga de color, como es el caso de los quarks y gluones. Cabe mencionar que los gluones son los campos  $G_{\mu\nu}^a$  que aparecen al imponer la simetría global  $SU(3)_C$  como local, como se muestra en la ecuación 2.40. Además, son los campos vectoriales mediadores de la interacción fuerte, por lo tanto, la interacción fuerte que hay entre dos quarks es mediada mediante el intercambio de gluones. Lo que nos dice que tan fuerte será una interacción es la constante de acoplamiento de dicha interacción, para el caso de QCD, la constante de acoplamiento  $g_c$  no es realmente constante, depende de la separación entre las partículas interactuantes, dicho fenómeno se le conoce como libertad asintótica. Las interacciones entre quarks se debilitan mientras menor sea la distancia entre ellos y aumentan mientras mayor sea la distancia entre ellos, es precisamente por este hecho, por el cual no hay en la naturaleza quarks "libres". Además, los quarks suelen estar confinados en hadrones. Los hadrones son partículas no fundamentales, como es el caso de los bariones que son partículas formadas por tres quarks  $qqq$  y los mesones, que son partículas formadas por un quark y antiquark  $q\bar{q}$  [9].

### 2.7.6. Interacción Electromagnética $U(1)_{EM}$

La interacción electromagnética se describe mediante la teoría de la electrodinámica cuántica (QED). Es aquella interacción que se produce entre dos o más partículas las cuales son portadoras de carga eléctrica, produciendo una fuerza de atracción para cargas de distinto signo y una fuerza de repulsión para cargas de mismo signo. La partícula mediadora de la interacción corresponde al fotón, cuyo campo vectorial  $A_\mu$  que lo describe, aparece post-ruptura espontánea de la simetría  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  como una combinación entre los campos  $W_\mu$  y el campo  $B_\mu$  como se muestra en las ecuaciones 2.63. La constante de acoplamiento de esta interacción tiene el valor de la magnitud de la carga eléctrica de un electrón, que se define como  $e = \sqrt{4\pi\alpha}$ , donde la constante de estructura fina  $\alpha = \frac{1}{137}$ .

### 2.7.7. Interacción débil $SU(2)_L$

La interacción débil forma parte de la teoría electrodébil descrita por el grupo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . A diferencia de la interacción electromagnética y fuerte, la interacción débil actúa sólo sobre fermiones con quiralidad izquierda, los cuales pre-ruptura de la simetría se organizaban en los dobletes descritos en las ecuaciones 2.54 y 2.52. En esta interacción, a diferencia de la fuerte o electromagnética, no existe una única carga débil, análoga al color o la carga eléctrica, sin embargo, todos los quarks y leptones pueden interactuar débilmente. Además, la intensidad de la interacción está definida por la constante de acoplamiento del grupo  $SU(2)_L$  y el grupo  $U(1)_Y$ , la cual se relaciona con la carga eléctrica mediante,  $e = g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W$ . Además, Los mediadores de la interacción débil, son los bosones vectoriales  $W^\pm$  y  $Z^0$  descritos en las ecuaciones 2.63.

### 2.7.8. Lagrangiano del modelo estándar

Considerando todas las partículas del ME y sus interacciones, es posible condensar toda esta información en un solo objeto, el lagrangiano del ME, el cual tiene todos los términos posibles que respeten la simetría  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ . Además, el lagrangiano del ME, debe respetar en su totalidad la simetría discreta  $CPT$ , que es la combinación de las tres simetrías discretas mencionadas anteriormente. También, se debe considerar que el lagrangiano del ME es un objeto invariante ante transformaciones de Lorentz, es decir, respeta los principios de la relatividad especial de Einstein. El lagrangiano del ME se puede escribir como la suma de otros lagrangianos,

$$\mathcal{L}_{ME} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_K + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_Y \quad (2.66)$$

Es conveniente definir una sola derivada covariante para todo el ME, la cual condense lo necesario para cumplir con el principio de invarianza local de gauge para el grupo del ME.

$$\mathcal{D} = \partial_\mu + ig'Y B_\mu + ig \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu + g_c \vec{\lambda} \cdot \vec{G}_\mu \quad (2.67)$$

Se puede observar que esta derivada covariante, se define en función de las ecuaciones 2.30, 2.34 y 2.39.

#### Lagrangiano $\mathcal{L}_G$

El lagrangiano de gauge es la parte cinética de todos los bosones de gauge que se dedujeron en el apartado de teorías de gauge, es decir,

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{4} W^{a\mu\nu} W_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4} G^{a\mu\nu} G_{\mu\nu}^a \quad (2.68)$$

donde las definiciones de los tensores  $B_{\mu\nu}$ ,  $W_{\mu\nu}$  y  $G_{\mu\nu}$ , vienen dadas por las ecuaciones 2.31, 2.36 y 2.40 respectivamente.

#### Lagrangiano $\mathcal{L}_K$

Este lagrangiano se construye a partir de los términos cinéticos de cada uno de los fermiones del modelo estándar, esto se puede expresar como,

$$\mathcal{L}_K = \sum_{\psi} \bar{\psi} i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi \quad (2.69)$$

Donde,  $\psi = L, e_r, q_L, u_r, d_R$  son los fermiones del ME. Además La suma incluye a todas las generaciones, colores y representaciones de  $SU(2)_L$ .

#### Lagrangiano $\mathcal{L}_H$

Este lagrangiano se construye a partir de la parte cinética del Higgs que, al ser un bosón con espín cero, se describe mediante el lagrangiano de KG descrito en la ecuación 2.12. por lo tanto, su parte cinética tiene la forma:

$$\mathcal{L}_{KH} = (\mathcal{D}_\mu H)^\dagger (\mathcal{D}^\mu H) \quad (2.70)$$

donde  $H$  es el doblete del Higgs definido en la ecuación 4.3. Por lo tanto,

$$\mathcal{L}_H = (\mathcal{D}_\mu H)^\dagger (\mathcal{D}^\mu H) - \mu^2 H^\dagger H + \lambda (H^\dagger H)^2 \quad (2.71)$$

donde se le añade el potencial del Higgs definido en la ecuación 2.58.

## Lagrangiano $\mathcal{L}_Y$

En el ME, los fermiones no puede poseer términos de masa, pues tales términos no respetan la simetría de gauge del ME, por lo tanto el ME prohíbe cualquier masa fermiónica antes de la ruptura espontánea de la simetría. Sin embargo, el campo de Higgs es un doblete de  $SU(2)_L$ , lo que nos permite construir operadores que conectan fermiones izquierdos y derechos sin romper la simetría de gauge del ME. Estos operadores son los términos de Yukawa  $Y_u, Y_d$  e  $Y_e$ , los cuales se entienden como matrices complejas calculadas experimentalmente tras conocer las masas de los fermiones, por lo tanto el lagrangiano del sector de yukawas se escribe como,

$$\mathcal{L}_Y = -\left(\bar{Q}_L Y_u \tilde{H} u_R + \bar{Q}_L Y_d H d_R + \bar{L}_L Y_e H e_R + \text{h.c.}\right) \quad (2.72)$$

Donde, el higgs conjugado  $\tilde{H}$  se define como,

$$\tilde{H} = i\tau_2 H^* = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

Además, la componente  $\tau_2$  se refiere a la segunda matriz de Pauli descrita en las ecuaciones 2.4. Y el término h.c. significa que hay que sumar el hermítico conjugado de cada término. Es importante resaltar que la ecuación 2.72 está compactada, la versión expandida está presente en el anexo 5.6. A pesar del gran éxito experimental de este modelo, el ME es una teoría incompleta, pues no explica la gravedad, la materia oscura, la energía oscura ni la masa de los neutrinos, por ello es un componente fundamental pero no es definitivo, de ahí que existan modelos más allá del modelo estándar como es el caso que se propone en el presente documento [9].

# Capítulo 3

## Neutrinos

En este capítulo se abordará la historia del neutrino como partícula postulada debido al estudio del decaimiento tipo beta.

Además, se indagará en el mecanismo de oscilación de neutrinos entre sus tres sabores, electrónico, muónico y tauónico, con el objetivo principal de demostrar que al haber oscilación de sabores, los neutrinos deben tener masa.

Posteriormente, se evaluarán los términos de masa tipo Dirac y términos de masa tipo Majorana, en adición a los mecanismos como extensiones del ME, por los cuales los neutrinos adquieren masa, tales como los mecanismos tipo Seesaw.

### 3.1. Historia

Históricamente, se propuso la existencia del neutrino debido al estudio de un decaimiento beta en los años 1930. En un decaimiento tipo beta, un núcleo radioactivo  $A$  se transforma en un núcleo un poco más ligero  $B$ , con la emisión de un electrón:

$$A \rightarrow B + e^- \quad (3.1)$$

Las leyes de conservación de carga requieren que  $B$  deba tener una unidad más de carga positiva que  $A$ , tal proceso podría ser el decaimiento de un neutrón  $A$  en un protón  $B$ . Ahora, en un decaimiento de dos cuerpos  $A \rightarrow B + C$ , las energías salientes están cinemáticamente determinadas, en el marco de referencia del centro de cuadri-momento, esto quiere decir,

$$E = \left( \frac{m_A^2 - m_B^2 + m_c^2}{2m_A} \right) c^2 \quad (3.2)$$

Lo importante a resaltar de esto, es que  $E$  está fijado una vez se conocen las tres masas de los cuerpos involucrados. Sin embargo, experimentalmente se determinó que los electrones emitidos variaban considerablemente en energía, por lo tanto, la ecuación 3.2 sólo determina la máxima energía de un electrón en un particular decaimiento tipo beta. Es por este hecho que, el científico Wolfgang Pauli sugirió que otra partícula es emitida durante un decaimiento beta, una partícula "silenciosa", la cual se lleva la energía "perdida". Tal partícula, debiese ser eléctricamente neutral, con el fin de conservar la carga eléctrica en un decaimiento beta. Además, debido a que experimentalmente la energía máxima del electrón fijada por la ecuación

3.2, coincidía con el valor máximo del espectro de energías observado experimentalmente, se deduce que la partícula debe ser extremadamente ligera. Si dicha partícula tuviese una masa considerable, los valores experimentales del espectro de energías tendrían un corrimiento hacia abajo, lo cual no coincide con las observaciones.

Debido a la neutralidad de la partícula y su ligereza, el científico Enrico Fermi la denominó neutrino (que en italiano significa literalmente "pequeño neutro").

En el contexto de un decaimiento beta, actualmente nos referimos a un anti-neutrino, el cual tiene las mismas propiedades que el neutrino pero con sus números cuánticos invertidos de signo. Por lo tanto, en la notación moderna, un decaimiento beta se escribe como,

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e \quad (3.3)$$

donde  $p^+$  corresponde a un protón,  $n$  corresponde a un neutrón y  $\bar{\nu}_e$  corresponde a un anti-neutrino del tipo eléctrico. Distintos experimentos tales como el del decaimiento beta, mostraban la necesidad de la existencia del neutrino como partícula fundamental, sin embargo, fue complicado demostrar su existencia experimentalmente, pues el neutrino tiene la particularidad de que interactúa muy débilmente con la materia, de hecho, un neutrino puede fácilmente penetrar 1000 años luz de plomo pasando totalmente desapercibido en el proceso. Para corroborar la existencia del neutrino experimentalmente, se realizaron una serie de experimentos en el reactor nuclear Savannah River en Carolina del Sur, alrededor de los años 1950. En tal reactor nuclear, los científicos Cowan y Reines, llenaron un gran tanque de agua y esperaban observar el decaimiento beta inverso, es decir,

$$\bar{\nu}_e + p^+ \rightarrow n + e^- \quad (3.4)$$

En tal detector, el flujo de anti-neutrinos se calculó de ser aproximadamente  $5 \times 10^{13}$  partículas por centímetro cuadrado por segundo, pero incluso con ese flujo, solo se esperaba tener dos o tres eventos cada hora. Por otro lado, desarrollaron un método para identificar el positrón saliente de tal reacción. Finalmente, sus resultados fueron positivos y dieron información inequívoca de la existencia del neutrino [13].

## 3.2. Oscilación de neutrinos

A medida de que fue descubierto el neutrino, se ha hecho distintas observaciones y experimentaciones con el fin de entender en mayor profundidad a esta partícula, una de esas experimentaciones se realizó en 1969 por el científico Raymond Davis [14], el cual buscó detectar los neutrinos electrónicos que debiesen llegar a la tierra producto a las reacciones nucleares en el interior del sol, sin embargo, los resultados fueron desconcertantes, pues el número de neutrinos electrónicos detectados correspondía a aproximadamente la mitad del valor esperado. Este problema fue resuelto por los experimentos realizados en el SNO [2] y el Super Kamiokande [3]; donde se descubrió que los neutrinos pueden cambiar de sabor leptónico, dicho fenómeno se conoce como oscilación de neutrinos. La oscilación de neutrinos es un fenómeno en el cual un cierto sabor de neutrino  $\nu_\alpha$ , periódicamente cambia a otro sabor de neutrino  $\nu_\beta$  y viceversa. Este fenómeno es causado por una amplitud de transición entre  $\nu_\alpha$  y  $\nu_\beta$ . Debido a esta amplitud de transición, los autoestados de sabor no tienen masas fijas

y se convierten en superposiciones de autoestados de masa. La función de onda general para tres sabores de neutrinos se expresa como,

$$|\psi_\nu(t)\rangle = C_e(t) |\nu_e\rangle + C_\mu(t) |\nu_\mu\rangle + C_\tau(t) |\nu_\tau\rangle \quad (3.5)$$

Por lo tanto, hay nueve amplitudes de transición entre los tres estados de sabor del neutrino. Se define la ecuación de estado relativista como,

$$\frac{dC(t)}{dt} = -i \frac{1}{\gamma} \mathcal{J} C(t) = -i \mathcal{J}' C(t), \quad (3.6)$$

donde,

$$C(t) = \begin{pmatrix} C_e(t) \\ C_\mu(t) \\ C_\tau(t) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}' = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \mu_e & \tau_{\mu e}^* & \tau_{\tau e}^* \\ \tau_{\mu e} & \mu_\mu & \tau_{\tau \mu}^* \\ \tau_{\tau e} & \tau_{\tau \mu} & \mu_\tau \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

y  $\mathcal{J}'$  es la matriz de transición efectiva. La ecuación 3.6 describe la evolución temporal del neutrino en la base de sabores, donde el vector columna 3.7, es un vector de amplitudes de probabilidad de que el neutrino sea electrónico, muónico o tauónico en el tiempo  $t$ . Para resolver la ecuación 3.6, se debe diagonalizar la matriz  $\mathcal{J}'$  utilizando una matriz unitaria  $U_\nu$ ,

$$U_\nu^\dagger \mathcal{J}' U_\nu = M' = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Donde se escribe los elementos de  $U_\nu$  de la forma,

$$U_\nu = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Por lo tanto, la matriz de elementos  $U_{\alpha i}$  y las masas  $m_i$  son combinaciones de los elementos de las amplitudes de transición  $\mathcal{J}_{\alpha\beta}$ . Si utilizamos la matriz de masa  $M'$ , la ecuación de estado 3.6 puede ser escrita como,

$$\frac{dD(t)}{dt} = -i M' D(t) \quad (3.10)$$

donde,

$$D(t) = \begin{pmatrix} D_1(t) \\ D_2(t) \\ D_3(t) \end{pmatrix} = U_\nu^\dagger C(t) \quad (3.11)$$

Tal ecuación, puede ser resuelta como,

$$D(t) = W(t) D(0) \quad (3.12)$$

donde,

$$W(t) = \begin{pmatrix} e^{-i(m_1/\gamma)t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i(m_2/\gamma)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(m_3/\gamma)t} \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$



Por consecuencia,  $C(t)$  puede ser obtenido a partir de  $D(t)$  como,

$$C(t) = U_\nu D(t) = [U_\nu W(t)] D(0) = [U_\nu W(t) U_\nu^\dagger] C(0) \quad (3.14)$$

Ahora, la función de onda de la ecuación 3.5 puede ser escrita en función de la ecuación 3.14 como la suma de tres autoestados de masa,

$$|\psi_\nu(t)\rangle = e^{-i(m_1/\gamma)t} D_1(0) |\nu_1\rangle + e^{-i(m_2/\gamma)t} D_2(0) |\nu_2\rangle + e^{-i(m_3/\gamma)t} D_3(0) |\nu_3\rangle \quad (3.15)$$

donde los autoestados de masa  $|\nu_i\rangle$  son mezclas de los tres autoestados de sabor  $|\nu_\alpha\rangle$  dados por,

$$\begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \\ |\nu_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{\mu 1} & U_{\tau 1} \\ U_{e2} & U_{\mu 2} & U_{\tau 2} \\ U_{e3} & U_{\mu 3} & U_{\tau 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \\ |\nu_\tau\rangle \end{pmatrix} = U_\nu^T \begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \\ |\nu_\tau\rangle \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Donde la matriz de mezcla  $U_\nu$  se le conoce como la matriz de Maki-Nakagawa-Sakata-Pontecorvo (MNSP) [15]. Lo importante de este fenómeno es que, la oscilación de neutrinos solo es posible si los autoestados de sabor son combinaciones de autoestados de masa con masas distintas. Si  $m_i = 0$  o  $m_1 = m_2 = m_3$  las fases temporales son iguales y el fenómeno desaparece. Por lo tanto, el hecho experimental de que existan cambios de sabor entre los neutrinos, implica que los neutrinos han de tener una masa distinta a cero. Sin embargo, en el ME los neutrinos se asumen como partículas sin masa, por ello, es necesario hacer una extensión al ME para explicar la masa de los neutrinos.

### 3.3. La masa de los neutrinos

En el modelo estándar, los neutrinos son fermiones que forman parte del doblete leptónico,  $L_{L\ell}^T = (\nu_\ell \ \ell)_L$ . Los neutrinos que son parte de este doblete leptónico se denominan neutrinos activos, y corresponden a los neutrinos asociados a cada leptón cargado,  $\ell = e, \mu, \tau$ . Como se mencionó en el apartado del ME, el grupo  $SU(2)_L$  esta relacionado con la interacción débil, es decir, los neutrinos sólo interactúan débilmente mediante la interacción débil cargada (asociada a los bosones  $W^{+-}$ ), y la interacción débil neutra (asociada al bosón  $Z^0$ ).

#### 3.3.1. Términos de masa para neutrinos.

Los términos de masa de neutrinos pueden ser contruidos de varias formas, siempre que se respete la simetría de gauge del modelo estándar. Es posible añadir distintos términos al lagrangiano del ME, por ejemplo, una extensión posible del modelo estándar es añadir neutrinos estériles derechos, que son partículas que no interactúan bajo el grupo de gauge del modelo estándar. El añadir  $m$ , número de neutrinos estériles  $\nu_{si}$ , nos permite construir dos tipos de términos de masa en el lagrangiano del modelo estándar:

$$-\mathcal{L}_{M_\nu} = M_{Dij} \bar{\nu}_{si} \nu_{Lj} + \frac{1}{2} M_{Nij} \bar{\nu}_{si} \nu_{sj}^c + \text{h.c.} \quad (3.17)$$

donde  $\nu_L$  corresponde al neutrino activo zurdo del ME,  $\nu^c$  es el neutrino con su campo conjugado,  $M_D$  es una matriz compleja de dimensión  $m \times 3$  y  $M_N$  es una matriz simétrica de

$m \times m$ . el primer término de masa es generado luego de la ruptura espontánea de la simetría electrodébil,

$$Y_{ij}^\nu \bar{\nu}_{si} \tilde{\phi}^\dagger L_{Lj} \Rightarrow M_{Dij} = Y_{ij}^\nu \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad (3.18)$$

Este corresponde al término de masa de Dirac y conserva totalmente el número leptónico. El segundo término del lagrangiano corresponde al término de masa de Majorana, nótese que difiere del termino de Dirac por distintos aspectos, por ejemplo, es un singlete ante el grupo de gauge, es decir, puede aparecer como un término desnudo en el lagrangiano, también, involucra dos neutrinos diestros (estériles), lo que implica que rompe el número leptónico en dos unidades, tal término no debiese estar permitido si los neutrinos llevan cargas conservativas. El lagrangiano 3.17, se puede reescribir como:

$$-\mathcal{L}_{M_\nu} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L^c & \bar{\nu}_s^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & M_D^T \\ M_D & M_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_s^c \end{pmatrix} + \text{h.c.} \equiv \bar{\nu}^c M_\nu \vec{\nu} + \text{h.c.}, \quad (3.19)$$

donde  $\vec{\nu} = (\nu_L, \nu_s^c)^T$  es un vector de dimensión  $(3+m)$ . La matriz  $M_\nu$  es una matriz compleja y simétrica que puede ser diagonalizada mediante una matriz unitaria  $V^\nu$  de dimensión  $(3+m)$ , lo que implica que,

$$(V^\nu)^T M_\nu V^\nu = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_{3+m}). \quad (3.20)$$

Entonces, es posible expresar los autoestados de sabor iniciales, en términos de autoestados de masa,

$$\vec{\nu}_{mass} = (V^\nu)^\dagger \vec{\nu} \quad (3.21)$$

Por lo tanto los términos de masa de 3.17, en función de los autoestados de masa toman la forma,

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{M_\nu} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3+m} m_k (\bar{\nu}_{mass,k}^c \nu_{mass,k} + \bar{\nu}_{mass,k} \nu_{mass,k}^c) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3+m} m_k \bar{\nu}_{Mk} \nu_{Mk}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde

$$\nu_{Mk} = \nu_{mass,k} + \nu_{mass,k}^c = (V^{\nu\dagger} \nu)_k + (V^{\nu\dagger} \nu)_k^c.$$

Por lo tanto, esos estados cumplen con la condición de Majorana

$$\nu_M = \nu_M^c.$$

y se les llama neutrinos de Majorana. La condición de majorana implica que solo un campo, describe tanto al neutrino como al anti-neutrino, a diferencia de los fermiones cargados cuyas partículas y antipartículas se describen mediante distintos campos. Esto significa que los neutrinos de majorana pueden ser descritos por solamente un espinor de dos componentes, a diferencia de las partículas de Dirac, que se describen mediante espinores de cuatro componentes [5].

### 3.3.2. Mecanismo de Seesaw tipo I

Si los autovalores de  $M_N$  son mucho mayores que los valores de masa del modelo estándar, la diagonalización se considera perturbativa,  $M_\nu$  lleva a tener tres neutrinos ligeros  $\nu_l$  y  $m$  neutrinos pesados,  $N$ :

$$-\mathcal{L}_{M_\nu} = \frac{1}{2} \bar{\nu}_l M^l \nu_l + \frac{1}{2} \bar{N} M^h N, \quad (3.23)$$

con,

$$M^l \simeq -V_l^T M_D^T M_N^{-1} M_D V_l, \quad M^h \simeq V_h^T M_N V_h, \quad (3.24)$$

y,

$$V^\nu \simeq \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{1}{2} M_D^\dagger M_N^{*-1} M_N^{-1} M_D\right) V_l & M_D^\dagger M_N^{*-1} V_h \\ -M_N^{-1} M_D V_l & \left(1 - \frac{1}{2} M_N^{-1} M_D M_D^\dagger M_N^{*-1}\right) V_h \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

donde  $V_l$  y  $V_h$  son matrices unitarias  $3 \times 3$  y  $m \times m$  respectivamente. Se observa que  $M^l$  es inversamente proporcional a  $M_N$  mientras que  $M^h$  es directamente proporcional a  $M_N$ , de ahí el nombre See-saw (balancín en inglés), pues si  $M^l$  debe ser pequeño, implica que  $M^h$  debe ser grande [5].

Cabe mencionar que el mecanismo Seesaw tipo I, permite introducir términos de masa sin romper ninguna simetría de gauge del ME, ya que los neutrinos derechos son singletes bajo el grupo de gauge del ME. No obstante, el modelo seesaw I, no tiene un mecanismo con el cual, de manera natural aparezcan los términos de masa para los neutrinos diestros. Además, para cumplir con la ligereza de los neutrinos activos del ME, es necesario introducir neutrinos derechos con masas extremadamente pesadas, que se acercan a la escala de gran unificación, siendo totalmente inaccesible su verificación experimental.

### 3.3.3. Mecanismo See-saw inverso mínimo

El mecanismo de See-saw inverso mínimo (SI), requiere introducir dos neutrinos estériles diestros, obteniendo así un lagrangiano relacionado a los términos de masa,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} n_L^T C \mathcal{M} n_L + \text{h.c.}, \quad (3.26)$$

donde,  $n_L^T = (\nu_L, N_1^c, N_2)$ ,  $C$  corresponde al operador de conjugación de carga, mientras que  $N_1$  y  $N_2$  corresponden a los neutrinos estériles diestros. para el caso de solo un neutrino activo, la matriz de masa para los autoestados de interacción débil,  $\mathcal{M}$  corresponde a,

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & m_D & 0 \\ m_D & 0 & M \\ 0 & M & \mu \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

Por lo tanto, si descomponemos 3.26, el lagrangiano queda como,

$$\mathcal{L} = -m_D \bar{\nu}_L N_{R1} - M \bar{N}_{R2} N_{R1} - \frac{\mu}{2} \bar{N}_{R2}^c N_{R2} + \text{h.c.} \quad (3.28)$$

La matriz 3.27 puede ser diagonalizada perturbativamente, de manera similar al caso del mecanismo See-saw tipo uno, cuando  $\mu \ll m_D \ll M$ , lo que nos proporciona un neutrino masivo. La matriz unitaria que nos permite acceder a los autoestados de masa viene dada por,

$$U_I = \begin{pmatrix} 1 & \frac{m_D \mu}{M^2 + m_D^2} & -\frac{m_D}{M} \\ \frac{im_D}{\sqrt{2}M} & \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{m_D}{\sqrt{2}M} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

donde la diagonalización perturbativa [16],

$$U_1^T \mathcal{M} U_I = \begin{pmatrix} (\frac{m_D}{M})^2 \mu & 0 & 0 \\ 0 & M + \frac{m_D^2}{M} + \frac{\mu}{2} & \frac{i\mu}{2} \\ 0 & \frac{i\mu}{2} & M + \frac{m_D^2}{M} - \frac{\mu}{2} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Por lo tanto,

$$m_\nu = \left( \frac{m_D}{M} \right)^2 \mu, \quad (3.31)$$

$$m_{N_1} = M + \frac{m_D^2}{M} - \frac{\mu}{2}, \quad (3.32)$$

$$m_{N_2} = M + \frac{m_D^2}{M} + \frac{\mu}{2} \quad (3.33)$$

$$(3.34)$$

serán los valores de las masas del neutrino activo  $m_\nu$ , el neutrino estéril  $m_{N_1}$  y el neutrino estéril  $m_{N_2}$  respectivamente [6].

## Capítulo 4

# El modelo seesaw inverso con ruptura espontánea de la simetría $U(1)$ leptónica

El modelo estándar cuenta con su simetría de gauge requerida para que existan las interacciones fundamentales (exceptuando la gravedad). En ausencia de singletes bajo el grupo de gauge completo del ME, se observa que existe una simetría adicional, la cual aparece de manera accidental, pero como consecuencia de la simetría de gauge del ME.

$$G_{ME}^{global} = U(1)_B \times U(1)_\ell \quad (4.1)$$

donde  $U(1)_B$  es la simetría del número bariónico, y  $U(1)_\ell$  corresponde la simetría del número leptónico total,  $L_e + L_\mu + L_\tau$ . Como bien se menciona en el apartado del ME, la ruptura espontánea de la simetría da masa a partículas, entonces, al combinar el mecanismo de SI que da una forma de matriz de masa para los neutrinos, una causa de esas masas puede ser la ruptura espontánea de la simetría  $U_L(1)$  [6].

### 4.1. Lagrangiano del modelo

Considerando la simetría  $U(1)_L$  y el mecanismo de SI, es posible construir el siguiente lagrangiano,

$$\mathcal{L} = -y_L \bar{L} H N_1^c - y_S S^\dagger \bar{N}_2 N_1^c - \frac{y_X}{2} X^\dagger \bar{N}_2^c N_2 + \text{h.c.} \quad (4.2)$$

El doblete del Higgs se define como,  $H^T = (\chi^+, (v_h + \sigma_h + i\chi_h)/\sqrt{2})$ , donde  $\sigma_h$  corresponde a su componente escalar,  $\chi_h$  corresponde a su componente pseudo-escalar,  $v_h \approx 246$  GeV corresponde a su VEV y  $\chi^+$  corresponde a la componente longitudinal de  $W^+$ . También se introducen tres nuevos acoplamientos de Yukawa,  $y_d, y_s, y_x$  los cuales no deben exceder el límite perturbativo, es decir,  $|y_i| \leq \sqrt{4\pi}$ . Además, se introducen dos nuevos campos escalares complejos, los cuales están cargados bajo carga leptónica pero son neutrales ante todo el

grupo de gauge del ME [6].

$$H = \left( \frac{\chi^+}{\frac{v_h + \sigma_h + i\chi_h}{\sqrt{2}}} \right) \quad (4.3)$$

$$S = \frac{(v_s + \sigma_s + i\chi_s)}{\sqrt{2}} \quad (4.4)$$

$$X = \frac{(v_x + \sigma_x + i\chi_x)}{\sqrt{2}} \quad (4.5)$$

Notese, que estos campos tienen su parte escalar asociada a  $\sigma_i$  y su parte pseudo-escalar asociada a  $\chi_i$ . Luego de la ruptura espontánea de la simetría  $U(1)_l$ , estos campos adquieren sus respectivos VEVs  $v_s$  y  $v_x$ . Por lo tanto, los términos de masa del modelo tendrán la forma:

$$m_D = \frac{y_L v_h}{\sqrt{2}}, \quad (4.6)$$

$$M = \frac{y_S v_S}{\sqrt{2}}, \quad (4.7)$$

$$\mu = \frac{y_X v_X}{\sqrt{2}}. \quad (4.8)$$

De estas relaciones, debido al límite perturbativo de los yukawas  $|y_i| \leq \sqrt{4\pi}$ , se pueden establecer cotas inferiores para los VEVs,

$$v_S \geq \frac{M}{\sqrt{2\pi}}, \quad (4.9)$$

$$v_X \geq \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}. \quad (4.10)$$

Por otro lado, el lagrangiano del modelo presente en la ecuación 4.2, debe ser invariante bajo la simetría global  $U(1)_\ell$ . Esta condición fija parcialmente las cargas leptónicas de los nuevos campos debido a los acoplamientos existentes en el lagrangiano [6].

	$L$	$N_1$	$N_2$	$S$	$X$
$SU(2)_L$	2	1	1	1	1
$U(1)_Y$	1/2	0	0	0	0
$U(1)_\ell$	1	-1	$x$	$1-x$	$2x$

Tabla 4.1: Asignación de cargas para el modelo. La primera fila enumera los campos: correspondientes al doblete leptónico  $L$ , los neutrinos derechos  $N_1$ ,  $N_2$  y los escalares  $S$ ,  $X$ . La primera columna indica el grupo de simetría bajo el cual se define cada carga.

En particular, el acoplamiento  $\bar{L} H N_1^c$ , exige que la carga leptónica del neutrino  $N_1$  sea  $q_\ell[N_1] = -1$ . Mientras que el acoplamiento  $S^\dagger \bar{N}_2 N_1^c$ , impone que  $q_\ell[S] = 1 - q_\ell[N_2]$ . Además, el acoplamiento  $X^\dagger \bar{N}_2^c N_2$  impone que:  $q_\ell[X] = 2q_\ell[N_2]$ . A partir de estos acoplamientos, se observa que existe un parámetro libre  $q_\ell[N_2] = x$ , el cual nos permite construir una asignación de carga para el modelo, como se muestra en la tabla 4.1.

## 4.2. Sector escalar

La adición de los nuevos campos escalares complejos  $S$  y  $X$ , implica la adición de sus respectivos potenciales, de tal forma que,

$$V_{SX} = -\mu_S^2 |S|^2 + \frac{\lambda_S}{4} |S|^4 - \mu_X^2 |X|^2 + \frac{\lambda_X}{4} |X|^4 + \lambda_5 |S|^2 |X|^2 + V_I, \quad (4.11)$$

donde los términos  $\mu^2$  son términos bilineales positivos y  $\lambda_i$  son términos de interacción entre los campos. Además, si queremos añadir un término de acoplamiento no trivial entre los campos  $S$  y  $X$ , es necesario dar un valor al parámetro libre  $x$ , se optó por  $x = 3/5$ . De esta forma, es posible añadir el siguiente término al potencial,

$$V_I = \lambda_j X S^{\dagger 3} + \text{h.c.} \quad (4.12)$$

Al realizar tal asignación de carga, nos permite tener valores fijos para las cargas leptónicas de todos los campos introducidos en el modelo, como se ilustra en la tabla 4.2.

	$L$	$N_1$	$N_2$	$S$	$X$
$SU(2)_L$	2	1	1	1	1
$U(1)_Y$	1/2	0	0	0	0
$U(1)_\ell$	1	-1	3/5	2/5	6/5

Tabla 4.2: Asignación de cargas para el modelo con  $x = 3/5$ . La primera fila enumera los campos: correspondientes al doblete leptónico  $L$ , los neutrinos derechos  $N_1$ ,  $N_2$  y los escalares  $S$ ,  $X$ . La primera columna indica el grupo de simetría bajo el cual se define cada carga.

También, se debe añadir el potencial del Higgs y sus interacciones con los otros campos,

$$V_{HSX} = -\mu_H^2 H^\dagger H + \frac{\lambda_H}{4} (H^\dagger H)^2 + \lambda_{HS} |S|^2 H^\dagger H + \lambda_{HX} |X|^2 H^\dagger H, \quad (4.13)$$

Para este potencial, se asumen los valores de  $m_h = 125$  GeV y  $\lambda_h = 0.516$  presentes en el modelo estándar [17]. Por lo tanto, el potencial total tendrá la forma:

$$V_{total} = V_{HSX} + V_{SX} \quad (4.14)$$

Considerando el potencial de la parte del Higgs y la parte de los escalares  $S$  y  $X$  [6].

A partir de este apartado, se utiliza el software Mathematica para la resolución de expresiones matemáticas. Es posible hallar expresiones para los términos  $\mu_i^2$  utilizando las ecuaciones de Tadpole es decir,

$$\left. \frac{\partial V_{total}}{\partial s_0^i} \right|_{s_0=0} = 0 \quad (4.15)$$

donde,  $s_0^T = (\sigma_h, \sigma_s, \sigma_x, \chi_s, \chi_x)$ . Nótese, que en las ecuaciones de Tadpole no se está considerando la parte cargada del Higgs  $\chi^+$  Y  $\chi_h$ , pues su resolución es trivial y no aporta información

relevante a nuestro procedimiento. A partir de 4.15, se halla que,

$$\mu_H^2 = \frac{1}{4}v_S^2 (\epsilon_H^2 \lambda_H + 2(\lambda_{HS} + \lambda_{HX} \omega^2)), \quad (4.16)$$

$$\mu_S^2 = \frac{1}{4}v_S^2 (2\epsilon_H^2 \lambda_{HS} + \lambda_S + 2\omega(-3\lambda_J + \lambda_5 \omega)), \quad (4.17)$$

$$\mu_X^2 = \frac{v_S^2}{4\omega} (-2\lambda_J + 2(\lambda_5 + \epsilon_H^2 \lambda_{HX})\omega + \lambda_X \omega^3). \quad (4.18)$$

donde se definen los parámetros,

$$\omega = v_x/v_s \quad (4.19)$$

$$\epsilon_h = v_h/v_s \quad (4.20)$$

Por lo tanto, con el reemplazo de estos valores de  $\mu_i$  en nuestro potencial total 4.14, es posible construir una matriz de masas utilizando,

$$\left. \frac{\partial^2 V_{\text{escalar}}}{\partial s_i^0 \partial s_j^0} \right|_{s_i^0=s_j^0=0} \equiv \{M^2\}_{ij}. \quad (4.21)$$

La matriz Hessiana de  $5 \times 5$  se puede expresar como,

$$M_s^2 = \begin{pmatrix} M_{es}^2 & 0 \\ 0 & M_{ps}^2 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Donde  $M_{es}^2$  corresponde a la matriz de masa de los escalares  $\sigma_i$

$$M_{es}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}v_S^2 \epsilon_H^2 \lambda_H & v_S^2 \epsilon_H \lambda_{HS} & v_S^2 \epsilon_H \lambda_{HX} \omega \\ v_S^2 \epsilon_H \lambda_{HS} & \frac{1}{2}v_S^2 (\lambda_S - 3\lambda_J \omega) & v_S^2 \left( -\frac{3\lambda_J}{2} + \lambda_5 \omega \right) \\ v_S^2 \epsilon_H \lambda_{HX} \omega & v_S^2 \left( -\frac{3\lambda_J}{2} + \lambda_5 \omega \right) & \frac{v_S^2 (\lambda_J + \lambda_X \omega^3)}{2\omega} \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Mientras que,  $M_{ps}^2$  corresponde a la matriz de masa de los pseudo-escalares  $\chi_i$ .

$$M_{ps}^2 = \begin{pmatrix} \frac{9}{2}v_S^2 \lambda_J \omega & -\frac{3}{2}v_S^2 \lambda_J \\ -\frac{3}{2}v_S^2 \lambda_J & \frac{v_S^2 \lambda_J}{2\omega} \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

### 4.3. Diagonalización de la matriz de masa

Es posible diagonalizar dichas matrices de masa, con el fin de hallar autoestados de masa reales. Es posible diagonalizar por separado el sector escalar y el sector pseudo-escalar.



### 4.3.1. Diagonalización $M_{ps}^2$

Para la matriz de masa de los pseudo-escalares, debemos hallar la matriz  $R_{ps}$  unitaria, la cual diagonalice  $M_{ps}^2$  es decir,

$$M_{psd}^2 = R_{ps} M_{ps}^2 R_{ps}^T \quad (4.25)$$

Dicha matriz se puede calcular y tiene la forma,

$$R_{ps} = \frac{1}{\sqrt{1+9\omega^2}} \begin{pmatrix} 1 & 3\omega \\ -3\omega & 1 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

De tal forma,

$$M_{psd}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_s^2 \lambda_J (1+9\omega^2)}{2\omega} \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Notese, que la diagonalización dio como resultado un pseudo-escalar sin masa, esto no es extraño, se debe a que la ruptura espontánea de una simetría global, conlleva la aparición un bosón de Nambu-Goldstone sin masa. Mientras que el pseudo-escalar, al cual nos referiremos como majorón, tiene una masa definida,

$$m_J^2 = \frac{v_s^2 \lambda_J (1+9\omega^2)}{2\omega} \quad (4.28)$$

### 4.3.2. Diagonalización $M_{es}^2$

Para la diagonalización de la matriz de los escalares, se considera que  $\epsilon_h \ll 1$ , por lo tanto, es una diagonalización perturbativa por bloques, Donde habrán dos rotaciones que diagonalicen  $M_{es}^2$ ,

$$M_{esd}^2 = R_2 R_1 M_{es}^2 R_1^T R_2^T \quad (4.29)$$

Donde la forma de  $R_1$  puede venir dada por,

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1+\psi} & \sqrt{1-\psi} \\ 0 & -\sqrt{1-\psi} & \sqrt{1+\psi} \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

Donde el parámetro  $\psi$  es una parametrización útil del ángulo de rotación  $\phi$  que diagonaliza el bloque pesado  $2 \times 2$ . Se define como  $\psi = \cos 2\phi$ , lo que implica que,

$$\cos \phi = \sqrt{\frac{1+\psi}{2}}, \quad \sin \phi = \sqrt{\frac{1-\psi}{2}}, \quad (4.31)$$

Además, con el fin de facilitar el proceso de la diagonalización, se realizaron los siguientes cambios de variables en el software de Mathematica,

$$\lambda_{x1} = \lambda_x + \frac{\lambda_J}{\omega^3} \quad (4.32)$$

$$\lambda_{51} = \lambda_5 - \frac{3\lambda_J}{2\omega} \quad (4.33)$$

$$\lambda_{s1} = \lambda_s - 3\lambda_J \omega \quad (4.34)$$

$$\Delta = \lambda_{x1} - \frac{\lambda_{51}}{\omega^2} \quad (4.35)$$

Finalmente, se puede hallar el valor algebraico de  $\psi$  que diagonaliza el primer bloque de nuestra matriz  $M_{es}^2$ , esto imponiendo la condición de que el sub-bloque rotado se anule, es decir,  $(M_{es}^2)_{23} = 0$ , por lo tanto el valor de  $\psi$  viene dado por:

$$\psi = -\frac{\Delta\omega}{\sqrt{16\lambda_{51}^2 + \Delta^2\omega^2}} \quad (4.36)$$

Para la segunda rotación  $R_2$ , que nos permita diagonalizar  $M_{es}^2$ , se optó por la siguiente matriz,

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon_h\psi_s & \epsilon_h\psi_x \\ -\epsilon_h\psi_s & 1 & 0 \\ -\epsilon_h\psi_x & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Las expresiones algebraicas para  $\psi_s$  y  $\psi_x$  (presentes en el anexo 5.8), se determinan de manera que los elementos afuera de la diagonal, tengan dependencia de  $\epsilon_h$  (o potencias mayores) y por lo tanto perturbativamente, la matriz sea diagonal tras las rotaciones.

Una vez diagonalizada la matriz de masas para los escalares, se obtuvieron expresiones para las masas al cuadrado,

$$m_{s_1}^2 = \frac{v_h^2\lambda_h}{2}A \quad (4.38)$$

$$m_{s_2}^2 = \frac{1}{4}v_s^2 \left( 2\lambda_{s1} - \omega \left( -\lambda_{51}\omega + \lambda_{x1}\omega + \sqrt{16\lambda_{51}^2 + (\lambda_{51} - \lambda_{x1})^2\omega^2} \right) \right) \quad (4.39)$$

$$m_{s_3}^2 = \frac{1}{4}v_s^2 \left( 2\lambda_{s1} + \omega \left( \lambda_{51}\omega - \lambda_{x1}\omega + \sqrt{16\lambda_{51}^2 + (\lambda_{51} - \lambda_{x1})^2\omega^2} \right) \right) \quad (4.40)$$

$$m_{\chi_1}^2 = 0 \quad (4.41)$$

$$m_J^2 = \frac{v_s^2\lambda_j(1 + 9\omega^2)}{2\omega} \quad (4.42)$$

Donde, se cumple que  $m_{s_1} < m_{s_2} < m_{s_3}$ . También, cabe mencionar que  $m_{s_1}$  corresponde a la masa del bosón de Higgs y  $A$  cuyo valor se encuentra en el anexo 5.9, es una combinación de los distintos parámetros de interacción los cuales en conjunto deben dar un valor similar a 1, esto para respetar el valor fijo de la masa del bosón de Higgs.

## 4.4. Espacio de parámetros

Con los resultados obtenidos, es posible construir un espacio de parámetros mediante el software *VScode* en lenguaje de *Python* dando rangos de valores plausibles a algunos parámetros, esto con el fin de encontrar otros valores de parámetros con sentido físico, esto teniendo en cuenta distintas condiciones físicas que se mencionarán caso a caso. En este modelo, se asumirá el rango

$$10^{-6} \ll x \ll 10^{-2} \quad \text{con} \quad 0 < x \ll 1 \quad (4.43)$$

para distintos parámetros perturbativos como  $\epsilon_h$ . Si bien, es posible ampliar el rango 4.43, esto puede llegar a romper la escala de Planck para masas, lo que implicaría tener en consideración

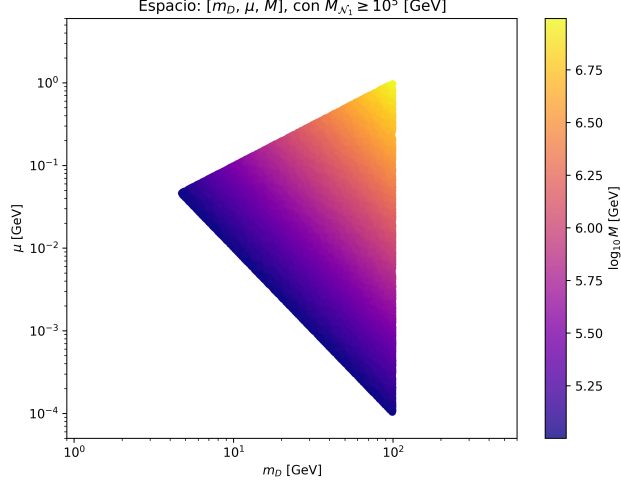


Figura 4.1: Espacio de masas SI, con  $M_{N_1} \geq 10^5$  GeV

efectos gravitacionales que no se pueden describir mediante nuestro modelo. Además, se utilizará un total de  $N = 1.000.000$  de muestras aleatorias, las cuales se definen mediante el comando "np.random.uniform()", tales muestras, además deben pasar por el comando "np.log10()" para que exista una distribución mas uniforme entre los valores. Este número de muestras aleatorias se acotarán a medida de que se introduzcan distintas condiciones para nuestros parámetros. Dentro del espacio de parámetros se tendrá en cuenta las relaciones,

$$|y_i| \leq \sqrt{4\pi} \quad (4.44)$$

$$0 < |\lambda_i| < 4\pi \quad (4.45)$$

$$\lambda_{ij} > -\sqrt{\lambda_i \lambda_j} \quad (4.46)$$

las cuales corresponden a relaciones de perturbatividad para los Yukawas  $y_i$  y acoplamientos  $\lambda_i$ , además de la condición de estabilidad del potencial relacionada a los términos  $\lambda_{ij}$ . En adición a las condiciones anteriores, para tener un potencial estable se imponen las condiciones para las ecuaciones de Tadpole 4.15 tal que, sean siempre positivos los valores de  $\mu_i^2$ . Además, con el fin de tener un modelo que pueda coexistir correctamente con el modelo estándar, se tomará que la masa del Higgs tendrá un valor de  $m_h \approx 125 \pm 0.1$  GeV y un valor del acoplamiento  $\lambda_h = 0.516$  [17].

#### 4.4.1. Espacio de masas de Seesaw Inverso

El modelo de Seesaw inverso impone la condición  $\mu \ll m_D \ll M$ , por lo tanto, se puede definir el parámetro perturbativo  $\epsilon_m = \frac{\mu}{m_D}$ , además de otro parámetro perturbativo,  $\epsilon_M = \frac{m_D}{M}$ . En este modelo, se va a definir un rango  $m_d$  basándonos que dentro del ME, los Yukawas  $y_i$  tienen un valor mínimo asociado al electrón de  $y_e \approx 2.9 \times 10^{-6}$  y un valor máximo asociado al quark top  $y_t \approx 1$ . Por lo tanto, a partir de definir un rango de

$$10^{-6} \leq y_D \leq 1, \quad (4.47)$$

utilizando la ecuación 4.6 y el valor del VEV del Higgs fijo  $v_s \approx 246$  GeV, se obtiene que,

$$10^{-4} \text{ GeV} \leq m_D \leq 10^2 \text{ GeV} \quad (4.48)$$

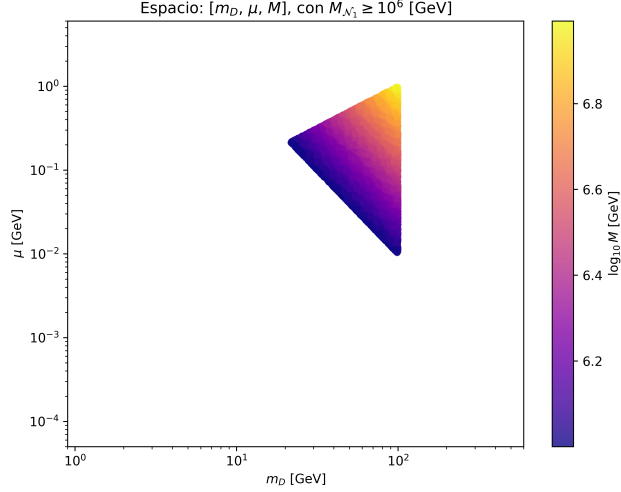


Figura 4.2: Espacio de masas SI, con  $M_{N_1} \geq 10^6$  GeV

lo que nos da un rango para  $m_D$ . También, es posible definir la variable  $\mu$  como,  $\mu = \epsilon_m m_D$ , esto con el fin de obtener un rango de valores para  $\mu$  en función de nuestra relación de perturbatividad y en función de nuestro rango para  $m_D$ . Con estos rangos para  $m_D$  y  $\mu$ , es posible construir el rango de valores para  $M$ , utilizando la ecuación 3.32 y considerando una masa de neutrino  $m_\nu = 10^{-10}$  GeV [17]. Además, se debe tener en cuenta que los neutrinos diestros  $N_1$  y  $N_2$  deben ser lo suficientemente pesados para no poder ser detectados con las limitaciones experimentales existentes, por ello, utilizando la ecuación 3.33, se agrega la condición,

$$M + \frac{m_D^2}{M} - \frac{\mu}{2} \geq 10^5 \text{ GeV} \quad (4.49)$$

Al considerar las condiciones de perturbatividad para los términos  $\epsilon$  y la condición para la masa del neutrino  $N_1$ , se obtienen los siguientes valores máximos y mínimos en los cuales estarán los valores de nuestras variables,

Parámetro	Mínimo	Máximo
$m_d$ [GeV]	4.67	$1.00 \times 10^2$
$M$ [GeV]	$1.00 \times 10^5$	$9.86 \times 10^6$
$\mu$ [GeV]	$1.01 \times 10^{-4}$	$9.85 \times 10^{-1}$

Es interesante notar que el rango de  $m_D$ , a pesar de ser definido en principio como en la ecuación 4.48, se termina acotando debido a las restricciones impuestas.

### Análisis del espacio $[m_D, \mu, M]$

Una vez definido los rangos de nuestras variables, es posible construir un espacio de masas del modelo SI como se muestra en la figura 4.1.

En dicho gráfico se presenta el espacio de puntos en el plano  $(m_D, \mu)$  coloreado por la variable  $\log_{10} M$ . Dichos puntos, satisfacen simultáneamente en su totalidad las condiciones impuestas tales como, 4.49,  $m_\nu = 10^{-10}$  GeV y las relaciones de perturbatividad  $\epsilon_m$  y  $\epsilon_M$ .

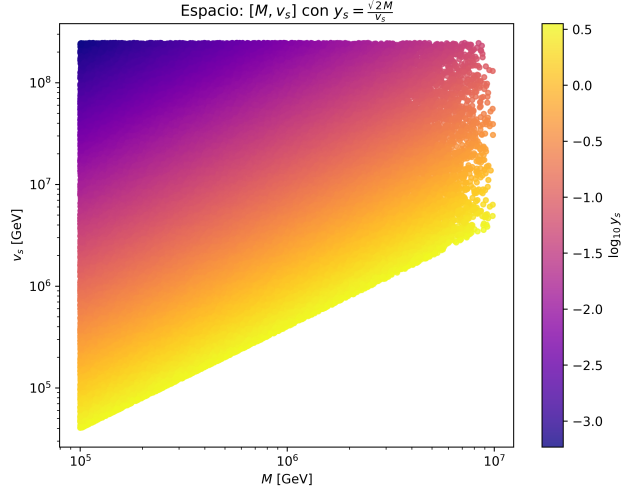


Figura 4.3: Espacio  $[M, v_s, y_s]$

El resultado muestra una forma triangular bien definida, lo que refleja las correlaciones entre las variables  $\mu$ ,  $m_d$  y  $M$ , la forma triangular es consecuencia directa de la relación de SI 3.32 considerando las relaciones perturbativas entre las masas. A partir de la figura, se observa que la mayoría de puntos para  $M$  se encuentran en el rango de  $10^5 < M < 10^7$  GeV, donde los valores mínimos de  $M$  se obtienen en las regiones en las cuales  $m_d$  y  $\mu$  son menores, mientras que los valores crecientes de  $\mu$  y  $m_D$ , tienen asociado un valor alto de  $M$ , esto siguiendo un crecimiento diagonal de color, debido a la dependencia  $M \propto m_d \sqrt{\mu}$ .

Además, es posible proponer otro valor mínimo de  $M_{N_1}$ , tal que:

$$M + \frac{m_D^2}{M} - \frac{\mu}{2} \geq 10^6 \text{ GeV} \quad (4.50)$$

Con el fin de observar la relevancia de la condición para el neutrino pesado en nuestro espacio de parámetros. A partir de la condición 4.50, es posible construir un nuevo espacio de masas del modelo SI 4.2. Dicho espacio, al igual que la figura anterior, muestra los puntos que satisfacen simultáneamente las condiciones de  $m_\nu = 10^{-10}$  GeV y las relaciones de perturbatividad para las variables  $\epsilon_m$  y  $\epsilon_m$ . 4.3.

Al comparar la figura 4.2 con la 4.1, se puede observar que se mantiene el patrón triangular y el patrón de color, sin embargo, existe una disminución considerable del área efectiva de la figura 4.1 con respecto a la figura 4.2. Por lo tanto, es a partir de exigir una restricción de la masa del neutrino pesado la que limita significativamente la cantidad de puntos válidos en nuestro modelo.

Cabe mencionar que con el fin de tener una mayor cantidad de puntos válidos, todas las figuras exceptuando 4.2, utilizan la restricción de masa del neutrino pesado 4.49.

#### 4.4.2. Espacio de Yukawas y VEVs

Con el fin de construir un espacio de parámetros relacionado al Yukawa  $y_s$ , es conveniente definir la variable  $v_s = \frac{246}{\epsilon_h}$  GeV, lo que nos permite generar valores aleatorios para  $v_s$  dentro del rango de perturbatividad de  $\epsilon_h$  que se define en la ecuación 4.43 y del límite inferior para

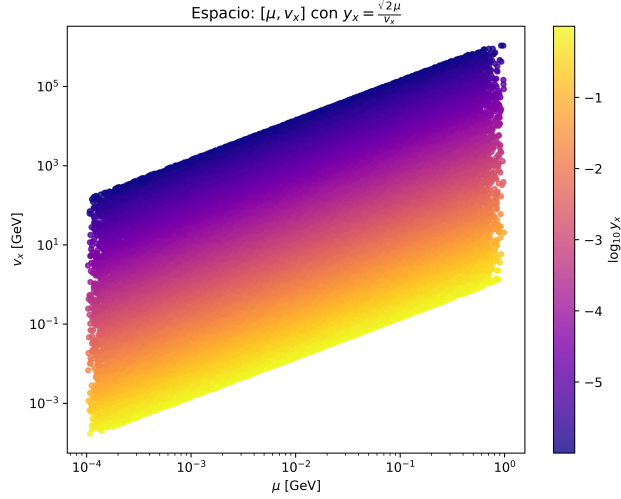


Figura 4.4: Espacio  $[\mu, v_s, y_s]$

$v_s$  que nos otorga la ecuación 4.10. Por lo tanto, podemos determinar valores de  $y_s$  utilizando la ecuación 4.7 y considerando el límite perturbativo de los Yukawas de la inecuación 4.44. Con ello, se obtienen los rangos mostrados en la tabla 4.3. Tales rangos son totalmente válidos

Tabla 4.3: Rangos de  $y_s$  y  $v_s$

Parámetro	Mínimo	Máximo
$y_s$	$5.82 \times 10^{-4}$	3.54
$v_s$ [GeV]	$4.06 \times 10^4$	$2.46 \times 10^8$

en el marco del ME y del SI. Además, nos permiten construir un espacio de parámetros relacionando  $v_s$ ,  $y_s$  y  $M$ , mediante la ecuación 4.7, como se muestra en la figura 4.3.

### Análisis del espacio $[M, v_s, y_s]$

La figura 4.3 muestra el espacio accesible en el plano  $(M, v_s)$  coloreado por la variable  $\log_{10} y_s$ . Los puntos representados corresponden a configuraciones físicas que satisfacen en conjunto las distintas condiciones impuestas.

El gráfico revela un espacio triangular el cual, se explica por la dependencia que existe entre los parámetros evaluados mientras  $y_s$  se mantiene en el rango perturbativo para los Yukawas.

Dado que  $y_s \propto M/v_s$ , los valores más altos de  $M$  requieren valores crecientes de  $v_s$  para evitar que el acoplamiento exceda el límite superior  $\sqrt{4\pi}$ . De manera similar, valores pequeños de  $v_s$  son solamente compatibles con valores de  $M$  pequeños. Es interesante notar que el eje vertical  $v_s$  cubre aproximadamente valores de  $10^5$  hasta  $10^9$  GeV, lo que muestra que el régimen permitido favorece valores altos de  $v_s$ , mientras que valores pequeños de  $v_s$  quedan totalmente excluidos pues inducirían valores de  $y_s$  no perturbativos.

Analizando el patrón de color, se puede observar que cuando el factor  $M/v_s \approx 1$ , los valores de  $y_s$  son mayores teniendo el color amarillo, sin embargo, a medida de que  $v_s$  sea

cada vez mayor a  $M$ , los valores de  $y_s$  toman colores más oscuros, lo cual es consecuente con la relación  $y_s \propto M/v_s$ . También es importante resaltar el truncamiento existe de la figura, este truncamiento viene dado el valor máximo que puede tener  $M$  de alrededor de  $10^7$  GeV en el eje horizontal por las condiciones de SI, si no existiera tal restricción para  $M$ , la figura podría alcanzar un patrón triangular más notorio.

Esta distribución ilustra la naturaleza inversa entre las relaciones de  $v_s$  y el Yukawa, los incrementos de  $v_s$  a escala fija de  $M$  reducen la magnitud de  $y_s$ , mientras que regiones donde  $M$  crece más rápido que  $v_s$  son rechazadas por la condición de perturbatividad, esto explica que no hay puntos por debajo de la zona coloreada amarilla.

Por otro lado, a diferencia del caso de  $v_s$ , el parámetro  $v_x$  no tiene porque ser perturbativo en nuestro modelo, por lo tanto, una forma de encontrar un rango plausible en el que habite este parámetro, es mediante fijar el rango de  $y_x$ , similar a como se realizó con  $y_d$ ,

$$10^{-6} \leq y_x \leq 1 \quad (4.51)$$

Una vez definido este rango para  $y_x$ , mediante la ecuación 4.8 podemos determinar el rango en el cual estará  $v_x$ , como se muestra en la tabla 4.4.

Tabla 4.4: Rangos de  $y_x$  y  $v_x$

Parámetro	Mínimo	Máximo
$y_x$	$1.00 \times 10^{-6}$	$9.99 \times 10^{-1}$
$v_x$ [GeV]	$1.71 \times 10^{-4}$	$1.15 \times 10^6$

### Análisis del espacio $[\mu, v_x, y_x]$

En la figura 4.4 se muestra el espacio permitido de nuestros puntos en el plano  $(\mu, v_x)$  coloreado por  $\log_{10} y_x$ . A diferencia de la figura 4.3, acá se definió un rango plausible para  $y_x$  con el fin de encontrar valores para  $v_x$ , y esto se ve reflejado por los valores de  $v_x$  que tienen una gran dispersión.

El área en el cual habitan los puntos válidos, tiene la particularidad de estar acotado verticalmente por dos líneas paralelas, las cuales vienen dadas por el límites inferior y superior en los cuales puede habitar el parámetro  $v_x$  en función de la ecuación 4.8 y el rango escogido para  $y_x$ ,

$$\frac{\sqrt{2}\mu}{\sqrt{4\pi}} \leq v_x \leq \frac{\sqrt{2}\mu}{10^{-6}} \quad (4.52)$$

Analizando el patrón de color, se observa que los valores más altos de  $y_x$  se concentran en la región inferior izquierda del área, correspondientes a un valor de  $\mu/v_x \approx 1$ , mientras que hacía la parte superior derecha, cuando  $\mu/v_x \ll 1$  o  $\mu/v_x \gg 1$ , el Yukawa disminuye, siendo consistente con la dependencia inversa  $y_x \propto \mu/v_x$ .

#### 4.4.3. Espacio de acoplamientos $\lambda_i$

A partir de la ecuación 4.42 y considerando la condición 4.45, es posible determinar valores para  $\lambda_J$  si fijamos un rango para  $m_J$  tal que,

$$10^{-5.5} \text{ GeV} < m_j < 10^{-5} \text{ GeV}. \quad (4.53)$$

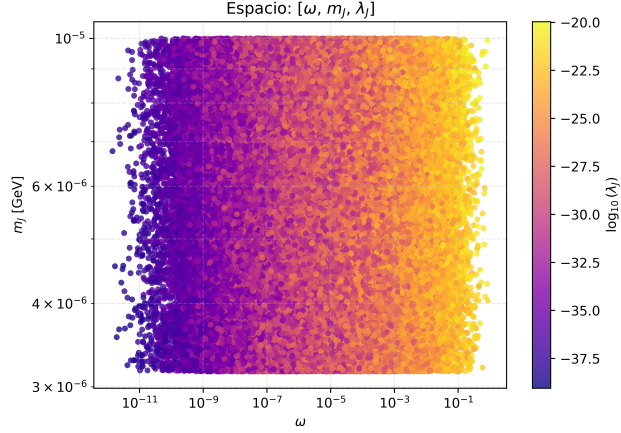


Figura 4.5: Espacio  $[m_J, \omega, \lambda_J]$

Tal rango, se escogió con el fin de que el Majorón pueda ser un candidato de materia oscura estable, para que al desintegrarse pudiese ser visto en observatorios de rayos x. Por lo tanto, se llega a los rangos mostrados en la tabla 4.5, en los cuales habitarán nuestros parámetros.

Tabla 4.5: Rangos de  $m_J$ ,  $\lambda_J$  y  $\omega$ .

Parámetro	Mínimo	Máximo
$\omega$	$1.43 \times 10^{-12}$	$8.53 \times 10^{-1}$
$m_J$	$3.16 \times 10^{-6}$	$9.99 \times 10^{-6}$
$\lambda_J$	$1.40 \times 10^{-39}$	$1.07 \times 10^{-20}$

### Análisis del espacio $[\omega, m_J, \lambda_J]$

En la figura 4.5 se presenta el espacio permitido en el plano  $(\omega, m_J)$  coloreado por el valor de  $\log_{10} \lambda_J$ . Se puede observar que los valores  $10^{-38} \leq \lambda_J \leq 10^{-20}$  son muy pequeños debido a la ecuación 4.42 y al rango en el cual definimos que está  $m_J$ . El gráfico muestra un área esencialmente rectangular con gran densidad, la forma rectangular muestra ausencia de correlaciones entre  $m_J$  y  $\omega$ , lo que confirma que dentro del rango elegido para el majorón, los filtros no generan restricciones que relacionen estos parámetros, sin embargo, estos parámetros si regulan el valor de  $\lambda_J$ , pues existe un patrón de color muy marcado.

La distribución de color muestra un patrón tal que, los valores más pequeños de  $\lambda_J$  (región violeta), se concentran en la parte izquierda del gráfico, donde  $\omega$  es pequeño, a medida que aumenta  $\omega$ , el parámetro  $\lambda_J$  crece, alcanzando sus valores máximos en la región derecha de color amarillo. Este comportamiento es consecuencia de la relación  $\lambda_J \propto \omega m_J^2$  que sale precisamente de la ecuación 4.42. Debido a que  $m_J$  varía relativamente poco por la condición que se propuso, el parámetro dominante es  $\omega$  el cual varía enormemente entre varios ordenes de magnitud.

Todo esto explica la transición continua horizontal del color purpura hasta el amarillo a lo largo de la figura.



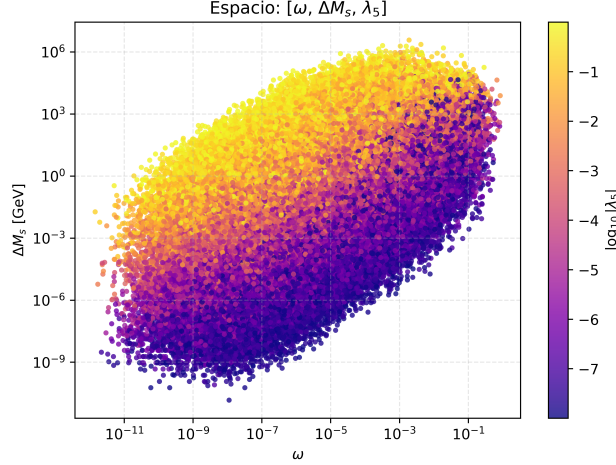


Figura 4.6: Espacio  $[\omega, \Delta M_s, \lambda_5]$

Por otro lado, es posible obtener valores numéricos para las masas de los escalares 4.39 y 4.40, esto al dar rangos de valores aceptables para  $\lambda_s$ ,  $\lambda_x$ ,  $\lambda_{hs}$ ,  $\lambda_{hx}$  y  $\lambda_5$ , que cumplan las condiciones de perturbatividad 4.45 y 4.46. Por lo tanto, se proponen los siguientes rangos,

$$10^{-6} < \lambda_i < 1 \quad (4.54)$$

$$\pm 10^{-10} < \lambda_{hs} < \pm 10^{-5} \quad (4.55)$$

$$\pm 10^{-10} < \lambda_{hx} < \pm 10^{-5} \quad (4.56)$$

$$\pm 10^{-8} < \lambda_5 < \pm 10^0 \quad (4.57)$$

Nótese que, los valores de  $\lambda_{hs}$  y  $\lambda_{hx}$  deben ser muy cercanos a cero, pues de esta forma, se puede obtener el valor de la masa del Higgs sin desviaciones muy grandes, esto se deduce al observar la ecuación de Tadpole para la masa del Higgs 4.15.

Por otro lado, el término  $\lambda_5$  no tiene tal restricción, por lo cual es posible ampliar su rango de valores. Por lo tanto, teniendo en consideración las restricciones mencionadas, nuestras variables quedan acotadas dentro de los siguientes rangos mostrados en la tabla 4.6. Al

Tabla 4.6: Rangos de acoplamientos del potencial escalar

Acoplamiento	Mínimo	Máximo	Mínimo abs	Máximo abs
$\lambda_{hs}$	$-6.77 \times 10^{-6}$	$1.00 \times 10^{-5}$	$1.00 \times 10^{-10}$	$9.98 \times 10^{-6}$
$\lambda_{hx}$	$-1.00 \times 10^{-5}$	$1.00 \times 10^{-5}$	$1.00 \times 10^{-10}$	$9.98 \times 10^{-6}$
$\lambda_s$	$1.00 \times 10^{-6}$	$9.99 \times 10^{-1}$	$1.00 \times 10^{-6}$	$9.99 \times 10^{-1}$
$\lambda_x$	$1.00 \times 10^{-6}$	$9.99 \times 10^{-1}$	$1.00 \times 10^{-6}$	$9.99 \times 10^{-1}$
$\lambda_5$	$-3.53 \times 10^{-2}$	$1.00 \times 10^0$	$1.00 \times 10^{-8}$	$1.00 \times 10^0$
$m_{s2}^2 [\text{GeV}^2]$	$1.57 \times 10^4$	$2.87 \times 10^{16}$	$1.57 \times 10^4$	$2.87 \times 10^{16}$
$m_{s3}^2 [\text{GeV}^2]$	$1.56 \times 10^4$	$2.87 \times 10^{16}$	$1.56 \times 10^4$	$2.87 \times 10^{16}$

comparar las ecuaciones 4.39 y 4.40 podemos notar que al restar  $m_{s3}^2 - m_{s2}^2$  se obtiene el término  $P$ ,

$$P = \frac{1}{2} v_s^2 \omega B \quad \text{con} \quad B = \sqrt{16 \lambda_{51}^2 + (\lambda_{51} - \lambda_{x1})^2 \omega^2} \quad (4.58)$$

el cual hace diferir los valores de las masas escalares.

### **Espacio** $[\omega, \Delta M_s, \lambda_5]$

A partir de las ecuaciones 4.39 y 4.40, es posible obtener expresiones para las masas escalares,

$$m_{s_2} = \frac{1}{2}v_s \sqrt{2\lambda_{s1} - \omega(-\lambda_{51}\omega + \lambda_{x1}\omega + B)} \quad (4.59)$$

$$m_{s_3} = \frac{1}{2}v_s \sqrt{2\lambda_{s1} + \omega(\lambda_{51}\omega - \lambda_{x1}\omega + B)} \quad (4.60)$$

Por lo tanto, podemos definir la variable  $\Delta M_s = m_{s_3} - m_{s_2}$ , con la cual es posible acceder a una figura que relacione los parámetros  $\Delta M_s$ ,  $\omega$  y  $\lambda_5$ . La figura 4.6 representa el espacio permitido en el plano  $(\omega, \Delta M_s)$  coloreado por el acoplamiento  $\log_{10} |\lambda_5|$ . A partir de la definición de  $P$  en la ecuación 4.58, utilizando la identidad notable de diferencia de cuadrados, se llega a la ecuación 4.61,

$$\Delta M_s = \frac{P}{m_{s_3} + m_{s_2}} \quad (4.61)$$

por lo tanto,  $\Delta M_s \propto P$  lo que implica por extensión que  $\Delta M_s$  depende principalmente del parámetro  $\omega$ . la figura 4.6 muestra una forma ovalada similar a una píldora debido a la estructura del parámetro  $B$ .

Dicha forma es en gran parte formada por el parámetro  $B$ , cuando  $\omega$  toma valores muy bajos, el término dominante de la ecuación 4.58 es  $\lambda_{51}^2$ , por lo que,

$$B \approx 4|\lambda_{51}| \quad \Delta M_s \propto \omega|\lambda_{51}| \quad (4.62)$$

En tal régimen,  $\Delta M_s$  crece prácticamente de manera lineal, mientras que para valores de  $\omega$  cercanos a la unidad, el término de la ecuación 4.58,  $(\lambda_{51} - \lambda_{x1})^2 \omega^2$  toma relevancia, lo que implica que,

$$B \approx |\lambda_{51} - \lambda_{x1}|\omega, \quad \Delta M_s \propto \omega^2 \quad (4.63)$$

Lo que permite tener una dependencia cuadrática de  $\omega$  que se traduce en una figura curva. Por lo tanto, la combinación de ambos comportamientos para los valores de  $\omega$  muestran una figura ovalada como se puede observar en el gráfico 4.6. A partir de la ecuación 4.33, se puede observar que  $\lambda_{51} \approx \lambda_5$  pues el término  $\lambda_j$  al ser extremadamente pequeño, vuelve irrelevante la dependencia con  $\omega$  del parámetro  $\lambda_{51}$ . El gradiente de color, muestra que valores pequeños de  $|\lambda_{51}|$  asociados a valores morados producen valores reducidos de  $B$ , lo que fuerza  $\Delta M_s$  a situarse en regiones inferiores.

Por otro lado, valores grandes de  $|\lambda_5|$  asociados al color amarillo, producen amplificadores de  $B$ , lo que implica tener valores mayores de  $\Delta M_s$ .

# Capítulo 5

## Conclusiones y Trabajo futuro

### 5.1. Conclusiones

En este trabajo se estudió un modelo SI con ruptura espontánea de la simetría  $U(1)_\ell$ , con el objetivo principal de evaluar si esta extensión mínima del ME es capaz de generar un término de masa para un neutrino activo, y a su vez, producir un pseudo-escalar como candidato a materia oscura.

A partir de las simetrías del modelo, se construye el lagrangiano del modelo y el potencial escalar. Lo que nos permitió construir las matrices de masa para los campos introducidos. Esto permitió obtener expresiones algebraicas para los autoestados de masa de los escalares y pseudo-escalares.

Eventualmente, con el fin de analizar sus comportamientos en función de los distintos parámetros involucrados, se realizó un muestreo aleatorio de  $10^6$  puntos sujetos a restricciones físicas plausibles, tales como, la masa del neutrino, la masa del neutrino pesado, la masa del Higgs, estabilidad del potencial y límites perturbativos: para acoplamientos y para relación de parámetros con diferencias en ordenes de magnitud.

Los resultados muestran que el modelo es válido para reproducir la jerarquía de masa del mecanismo SI, lo que nos permite obtener un término de masa para un neutrino activo del ME.

El análisis del gráfico 4.1 muestra la correlación existente entre las masas del modelo SI  $[m_D, \mu, M]$ , donde se llega a un patrón triangular bien definido. Además, el tamaño de dicha figura depende explícitamente de la restricción dada por la masa del neutrino pesado, como se observa al comparar las figuras 4.1 y 4.2.

Además, al observar las correlaciones entre  $m_J$ ,  $\omega = v_x/v_s$  y  $\lambda_J$  presentes en el gráfico 4.5. Se observa que no existen correlaciones claras entre  $m_J$  y  $\omega$  debido al patrón rectangular marcado de la figura, no obstante, existe una correlación clara entre  $\omega$  y  $\lambda_J$ , que se ve reflejada por el gradiente de color característico de la figura.

Por otro lado, fue posible hallar correlaciones claras entre las diferencias de masa de los escalares físicos  $\Delta M_s = (m_{s_3} - m_{s_2})$ ,  $\omega$  y  $\lambda_5$ . Esto fue posible al definir la variable  $P = (m_{s_3}^2 - m_{s_2}^2)$  y ver su relación con  $\Delta M_s$ . Lo que nos permitió entender la razón por la cual la figura 4.6, obtiene una forma ovalada tipo píldora con un gradiente de color marcado por el acoplamiento  $\lambda_5$ . Además, el análisis de los gráficos muestra correlaciones claras entre

los Yukawas ( $y_D, y_s, y_x$ ), los VEVs ( $v_s, v_x$ ) y las masas del SI ( $m_D, M, \mu$ ), lo que se representa mediante patrones triangulares y rectangulares, con límites debido a cotas de perturbatividad entre los Yukawas y límites de masas máximos impuestos en el modelo.

También, Debido a la restricción impuesta de la masa del pseudo-escalar majorón  $10^{-5.5} \leq m_j \leq 10^{-5}$  GeV, el modelo es capaz de manera natural ofrecer un candidato viable para materia oscura, que pudiese ser visto de manera observacional, esto mediante observatorios de rayos X.

## 5.2. Trabajo Futuro

A pesar de la coherencia interna del modelo, existen ciertas limitaciones que podrían trabajarse en una investigación futura tales como:

- En el modelo se consideró solo un neutrino activo que adquirió masa, cuando sabemos mediante las observaciones, que existen tres neutrinos activos. Esto se podría trabajar si añadimos más neutrinos diestros al modelo.
- Es posible analizar los posibles canales de decaimiento para el majorón, para ratificar de manera más precisa si funciona como candidato a materia oscura.
- La ruptura espontánea de la simetría global  $U(1)_\ell$  deja consigo un bosón de Nambu-Goldstone, por este hecho, es posible imponer que la simetría sea local, lo que permitiría introducir un nuevo campo vectorial que pudiese estudiarse como candidato a materia oscura también.
- Las figuras pueden tener formas aún más definidas al considerar una mayor cantidad de muestras aleatorias.

# Bibliografía

- [1] G. Aad et al. Observation of a new particle in the search for the standard model higgs boson with the atlas detector at the LHC. *Physics Letters B*, 716:1–29, 2012.
- [2] A. B. McDonald. Sudbury neutrino observatory results. *Physica Scripta*, T121:29–32, 2005.
- [3] C. W. Walter. The super-kamiokande experiment. *arXiv preprint*, (arXiv:0802.1041), 2008. Chapter “2”, 7 Feb 2008.
- [4] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, F. Arroja, and et al. Planck 2015 results. xiii. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 594:A13, 2016.
- [5] M. C. Gonzalez-Garcia and M. Yokoyama. Neutrino masses, mixing, and oscillations. *Review of Particle Physics (Particle Data Group)*, 110:030001, 2024. Revised September 2023.
- [6] N. Rojas, R. A. Lineros, and F. Gonzalez-Canales. Majoron dark matter from a spontaneous inverse seesaw model. *arXiv preprint*, 2020. arXiv:1703.03416v2 [hep-ph].
- [7] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1995.
- [8] W. Pauli. Über den zusammenhang des abschlusses der elektronengruppen im atom mit der komplexstruktur der spektren. *Zeitschrift für Physik*, 31:765–783, 1925.
- [9] David J. Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. Wiley-VCH, Weinheim, 2nd edition, 2008.
- [10] W. Pauli. The connection between spin and statistics. *Physical Review*, 58:716–722, 1940.
- [11] Mark Thomson. *Modern Particle Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
- [12] C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes, and R. P. Hudson. Experimental test of parity conservation in beta decay. *Phys. Rev.*, 105:1413–1414, 1957.
- [13] Clyde L. Cowan and Frederick Reines. Detection of the free neutrino: A confirmation. *Science*, 124(3212):103–104, 1956.

- [14] B. T. Cleveland, T. Daily, R. Davis, J. R. Distel, K. Lande, C. K. Lee, P. S. Wildenhain, and J. Ullman. Measurement of the solar electron neutrino flux with the homestake chlorine detector. *Astrophysical Journal*, 496:505–526, 1998.
- [15] Umihiko Suekane. *Neutrino Oscillations: A Practical Guide to Basics and Application*, volume 225 of *Springer Tracts in Modern Physics*. Springer, 2014.
- [16] Hugo A. Videla Magnata. Modelo de seesaw inverso espontáneo con simetría local  $U(1)$  leptónica. Tesina de Licenciatura, Universidad Católica del Norte, Antofagasta, Chile, 2021.
- [17] P. F. de Salas, D. V. Forero, S. Gariazzo, P. Martínez-Miravé, O. Mena, C. A. Ternes, M. Tórtola, and J. W. F. Valle. 2020 global reassessment of the neutrino oscillation picture. 2020.
- [18] A. Zee. *Group Theory in a Nutshell for Physicists*. Princeton University Press, Princeton, 2016.

# Anexo

## 5.3. Matrices de Gell-Mann:

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

$$\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

## 5.4. Constantes de estructura:

$$f^{123} = 1, \quad f^{147} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = f^{516} = f^{637} = \frac{1}{2}, \quad f^{458} = f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (5.4)$$

## 5.5. Transformación $SO(2)$

$SO(2)$  consiste en todas las matrices ortogonales  $2 \times 2$  con determinante 1. Una transformación en  $SO(2)$  tiene la forma,

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

y se entiende como una rotación en dos dimensiones.[\[18\]](#)

## 5.6. Lagrangiano $\mathcal{L}_Y$

$$\mathcal{L}_Y = - \sum_{i,j=1}^3 \sum_{\alpha=1}^3 \left[ \bar{Q}_{Li}^{\alpha\alpha} (Y_u)_{ij} \tilde{H}_a u_{Rj}^\alpha + \bar{Q}_{Li}^{\alpha\alpha} (Y_d)_{ij} H_a d_{Rj}^\alpha \right] - \sum_{i,j=1}^3 \left[ \bar{L}_{Li}^a (Y_e)_{ij} H_a e_{Rj} \right] + \text{h.c.} \quad (5.6)$$

Donde la suma  $i, j$  recorre las tres generaciones de fermiones, la suma  $\alpha$  recorre los tres colores (para los quarks).

## 5.7. Valores de $\psi_x$ y $\psi_s$

Los valores de  $\psi_x$ ,  $\psi_s$  se determinan con el fin de tener una matriz de masa diagonalizada, por lo tanto se puede llegar a las expresiones analíticas mediante Mathematica 5.8.

$$\psi_s = \frac{2 \left[ \lambda_{hs} \sqrt{2 - \frac{2\Delta\omega}{\sqrt{16\lambda_{51}^2 + \Delta^2\omega^2}}} + \lambda_{hx} \omega \sqrt{2 + \frac{2\Delta\omega}{\sqrt{16\lambda_{51}^2 + \Delta^2\omega^2}}} \right]}{-2\lambda_{s1} + \omega \left( \Delta\omega + \sqrt{16\lambda_{51}^2 + \Delta^2\omega^2} \right)} \quad (5.7)$$

$$\psi_x = \frac{-2\lambda_{hx} \omega \sqrt{2 - \frac{2\Delta\omega}{\sqrt{16\lambda_{51}^2 + \Delta^2\omega^2}}} + 2\lambda_{hs} \sqrt{2 + \frac{2\Delta\omega}{\sqrt{16\lambda_{51}^2 + \Delta^2\omega^2}}}}{2\lambda_{s1} + \omega \left( -\Delta\omega + \sqrt{16\lambda_{51}^2 + \Delta^2\omega^2} \right)} \quad (5.8)$$

## 5.8. Valor del parámetro $A$

Producto de la diagonalización de la matriz del sector escalar, se obtiene que la masa del bosón de Higgs es proporcional a una combinación de los distintos parámetros de interacción añadidos al modelo, si aislamos el factor  $v_h^2 \lambda_h / 2$  correspondientes al valor de la masa del



Higgs en el ME, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
A = & \left[ -\frac{8\lambda_{hs}^2\lambda_{s1}}{\lambda_h(-8\lambda_{51}^2\omega^2 + 2\lambda_{s1}(\lambda_{s1} + (\lambda_{51} - \lambda_{x1})\omega^2))} + \frac{2\lambda_{s1}^2}{-8\lambda_{51}^2\omega^2 + 2\lambda_{s1}(\lambda_{s1} + (\lambda_{51} - \lambda_{x1})\omega^2)} \right. \\
& - \frac{8\lambda_{51}^2\omega^2}{-8\lambda_{51}^2\omega^2 + 2\lambda_{s1}(\lambda_{s1} + (\lambda_{51} - \lambda_{x1})\omega^2)} - \frac{8\lambda_{51}\lambda_{hs}^2\omega^2}{\lambda_h(-8\lambda_{51}^2\omega^2 + 2\lambda_{s1}(\lambda_{s1} + (\lambda_{51} - \lambda_{x1})\omega^2))} \\
& - \frac{32\lambda_{51}\lambda_{hs}\lambda_{hx}\omega^2}{\lambda_h(-8\lambda_{51}^2\omega^2 + 2\lambda_{s1}(\lambda_{s1} + (\lambda_{51} - \lambda_{x1})\omega^2))} + \frac{2\lambda_{51}\lambda_{s1}\omega^2}{-8\lambda_{51}^2\omega^2 + 2\lambda_{s1}(\lambda_{s1} + (\lambda_{51} - \lambda_{x1})\omega^2)} \\
& - \frac{8\lambda_{hx}^2\lambda_{s1}\omega^2}{\lambda_h(-8\lambda_{51}^2\omega^2 + 2\lambda_{s1}(\lambda_{s1} + (\lambda_{51} - \lambda_{x1})\omega^2))} + \frac{8\lambda_{hs}^2\lambda_{x1}\omega^2}{\lambda_h(-8\lambda_{51}^2\omega^2 + 2\lambda_{s1}(\lambda_{s1} + (\lambda_{51} - \lambda_{x1})\omega^2))} \\
& \left. - \frac{2\lambda_{s1}\lambda_{x1}\omega^2}{-8\lambda_{51}^2\omega^2 + 2\lambda_{s1}(\lambda_{s1} + (\lambda_{51} - \lambda_{x1})\omega^2)} \right] \tag{5.9}
\end{aligned}$$