



UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Física

**EXPANSIÓN DEL UNIVERSO TEMPRANO EN
COSMOLOGÍA NO ESTÁNDAR**

Tesina para optar al grado de Licenciado en Física con Mención
en Astronomía

VICENTE VILLEGAS INOSTROZA

Profesor guía: Dr. Roberto Lineros Rodríguez.

Antofagasta, Chile.

Junio, 2022

Esta tesina está dedicada a todos mis seres queridos

Contenido

Índice de figuras	iii
Índice de tablas	vii
Resumen.	viii
1. Cosmología Estándar	1
1.1. Ecuación de Friedmann	2
1.2. Geometría del Universo	6
1.3. Modelos Cosmológicos	7
1.3.1. Constante Cosmológica	10
1.4. Materia Oscura	11
1.5. Fondo Cósmico de Microondas (CMB)	13
1.6. Nucleosíntesis	14
1.7. Inflación	16
1.7.1. Problemas de la teoría del Big Bang	17
2. Cosmología No Estándar	21
2.1. Mecanismos Inflacionarios	21
2.1.1. Inflación como un campo escalar dinámico	24
2.1.2. Evolución No estándar	25
3. Análisis y Resultados	32
3.1. Evolución de las densidades de energía variando los parámetros ω_ϕ , $x_{\text{crit}}^{\text{an}}$ y γ_ϕ	33
3.2. Evolución de la tasa de expansión H	38

3.2.1. Dependencia de $x_{\text{end}}^{\text{num}}$ para γ_ϕ	43
3.2.2. Implicancias en la Abundancia de Materia Oscura	45
4. Conclusiones	48
Bibliografía.	51
Anexo	53

Índice de figuras

1.1. Plano que muestra las densidades de materia Ω_0 y de la constante cosmológica Ω_Λ para identificar los distintos modelos del Universo. La figura muestra las propiedades principales en regiones diferentes, donde las etiquetas indican el comportamiento en cada lado de las líneas divisoras.[1]	20
2.1. Ejemplo de un potencial de inflatón $V(\phi)$ vs ϕ que ilustra el ‘slow-roll’ desde un valor ρ_i hasta ρ_{end} para luego oscilar coherentemente sobre el mínimo del potencial en σ y generar el recalentamiento, convirtiendo la energía del inflatón en radiación [2].	23
2.2. Gráfico $x^4 \rho_\phi / \rho_{\text{end}}$ vs $x = a/a_{\text{end}}$, donde se representa la evolución de las densidades de energía a través de la solución analítica normalizada a $\rho_{R_{\text{end}}}$. La línea naranja muestra la evolución de ρ_ϕ para $\omega = -1$ y las líneas azules la evolución de ρ_R . En $x = a_{\text{end}}/a_{\text{end}} = 1$ la densidad de energía $x^4 \rho_R$ queda constante en 1, indicando que llegó a la densidad requerida para una exitosa BBN y el fin de la dominación de ρ_ϕ . En la línea superior verde se ve la evolución de $\tilde{\rho}_R$ para el caso de una evolución estándar.	29

-
- 2.3. Gráfico $x^4\rho/\rho_{\text{end}}$ vs $x = a/a_{\text{end}}$, donde se representa la evolución de las densidades de energía mediante una solución analítica y tres numéricas. Las líneas azules y naranja corresponden a la solución analítica de la figura 2.2. Mientras que las curvas discontinuas verde y continuas negras indican la evolución de $\tilde{\rho}_\phi$ y $\tilde{\rho}_R$, de nuestras soluciones numéricas respectivamente. Las evoluciones numéricas se realizaron a partir del mismo valor de $x_{\text{crit}}^{\text{num}} = 0,1$ y $\omega_\phi = -1$ pero con diferentes tasas de decaimiento, siendo $\gamma_\phi = 0,62173$ el valor necesario para que la densidad de energía del ME termine por coincidir con la evolución estándar. Para las curvas de energía superiores de $\tilde{\rho}_\phi$ y $\tilde{\rho}_R$, se usó una tasa de decaimiento $\gamma_\phi = 0,900$, mientras que para las inferiores $\gamma_\phi = 2,100$ 30
- 3.1. Gráfico de $x^4\rho/\rho_{R_{\text{end}}}$ vs $x = a/a_{\text{end}}$ en que se muestra la evolución de las densidades de energía ρ_ϕ y ρ_R a través de sus soluciones numéricas y analíticas, para un $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 10^{-5}$, $\omega_\phi = -1$ y $\gamma_\phi = 0,15649$ 34
- 3.2. Gráfico de $x^4\rho/\rho_{R_{\text{end}}}$ vs $x = a/a_{\text{end}}$ en que se muestra la evolución de las densidades de energía ρ_ϕ y ρ_R a través de sus soluciones numéricas y analíticas, para un $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 0,2$, $\omega_\phi = -1$ y $\gamma_\phi = 0,8156$ 34
- 3.3. Gráfico de $x^4\rho/\rho_{R_{\text{end}}}$ vs $x = a/a_{\text{end}}$ en que se muestra la evolución de las densidades de energía ρ_ϕ y ρ_R a través de sus soluciones numéricas y analíticas, para un $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 10^{-5}$, $\omega_\phi = 0$ y $\gamma_\phi = 1,1337$ 35
- 3.4. Gráfico de $x^4\rho/\rho_{R_{\text{end}}}$ vs $x = a/a_{\text{end}}$ en que se muestra la evolución de las densidades de energía ρ_ϕ y ρ_R a través de sus soluciones numéricas y analíticas, para un $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 0,2$, $\omega = 0$ y $\gamma_\phi = 1,99335$ 36
- 3.5. Gráfico de $x^4\rho/\rho_{R_{\text{end}}}$ vs $x = a/a_{\text{end}}$ en que se muestra la evolución de las densidades de energía ρ_ϕ y ρ_R a través de sus soluciones numéricas y analíticas, para un $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 0,5$, $\omega_\phi = 0$ y $\gamma_\phi = 5,65291$ 37

3.6. Gráfico de $x^4\rho/\rho_{R_{\text{end}}}$ vs $x = a/a_{\text{end}}$ en que se muestra la evolución de las densidades de energía ρ_ϕ y ρ_R a través de sus soluciones numéricas y analíticas, para un $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 10^{-5}$, $\omega_\phi = 1/5$ y $\gamma_\phi = 1,20361$	37
3.7. Gráfico de $x^4\rho/\rho_{R_{\text{end}}}$ vs $x = a/a_{\text{end}}$ en que se muestra la evolución de las densidades de energía ρ_ϕ y ρ_R a través de sus soluciones numéricas y analíticas, para un $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 0,1$, $\omega_\phi = 1/5$ y $\gamma_\phi = 15,5296$.	38
3.8. Gráfico de x^2H/H_{end} vs $x = a/a_{\text{end}}$, en el que se muestra la evolución de la tasa de expansión H normalizada con $\omega_\phi = -1$, $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 10^{-5}$ y $\gamma_\phi = 0,15649$ mediante las soluciones analíticas y numéricas de ρ_R y ρ_ϕ . Línea superior constante corresponde a la tasa de expansión para una evolución estándar.	40
3.9. Gráfico de x^2H/H_{end} vs $x = a/a_{\text{end}}$, en el que se muestra la evolución de la tasa de expansión H normalizada con $\omega_\phi = -1$, $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 0,2$ y $\gamma_\phi = 0,8156$ junto a su evolución analítica. Línea superior constante corresponde a la tasa de expansión para una evolución estándar.	41
3.10. Gráfico de x^2H/H_{end} vs $x = a/a_{\text{end}}$, en el que se muestra la evolución de la tasa de expansión H normalizada con $\omega_\phi = 0$, $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 10^{-5}$ y $\gamma_\phi = 1,1337$ junto a su evolución analítica. Línea superior constante corresponde a la tasa de expansión para una evolución estándar.	42
3.11. Gráfico de x^2H/H_{end} vs $x = a/a_{\text{end}}$, en el que se muestra la evolución de la tasa de expansión H normalizada con $\omega_\phi = 0$, $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 0,2$ y $\gamma_\phi = 1,99335$ junto a su evolución analítica. Línea superior constante corresponde a la tasa de expansión para una evolución estándar.	43
3.12. Gráfico de x^2H/H_{end} vs $x = a/a_{\text{end}}$, en el que se muestra la evolución de la tasa de expansión H normalizada con $\omega_\phi = 0$, $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 0,5$ y $\gamma_\phi = 5,65291$ junto a su evolución analítica. Línea superior constante corresponde a la tasa de expansión para una evolución estándar.	44

3.13. Gráfico de x^2H/H_{end} vs $x = a/a_{\text{end}}$, en el que se muestra la evolución de la tasa de expansión H normalizada con $\omega_\phi = 0,20$, $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 10^{-5}$ y $\gamma_\phi = 1,20361$ junto a su evolución analítica. Línea superior constante corresponde a la tasa de expansión para una evolución estándar.	45
3.14. Gráfico de x^2H/H_{end} vs $x = a/a_{\text{end}}$, en el que se muestra la evolución de la tasa de expansión H normalizada con $\omega_\phi = 0,20$, $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 0,1$ y $\gamma_\phi = 15,5296$ junto a su evolución analítica. Línea superior constante corresponde a la tasa de expansión para una evolución estándar.	46
3.15. Gráfico de $x_{\text{end}}^{\text{num}}$ vs $\gamma_\phi = \Gamma_\phi/\sqrt{3}M_P$, en el que se muestra el comportamiento que sigue $x_{\text{end}}^{\text{num}}$ para los distintos valores de ω_ϕ . La curva azul representa el caso $\omega_\phi = -1$, la curva naranja $\omega_\phi = 0$, y la curva verde $\omega_\phi = 1/5$	47
4.1. Solución analítica de la evolución de las densidades de energía $\tilde{\rho}_\phi$ y $\tilde{\rho}_R$	53
4.2. Solución numérica de la evolución de las densidades de energía $\tilde{\rho}_\phi$ y $\tilde{\rho}_R$	54
4.3. Función Modulo del programa Mathematica para hallar $x_{\text{crit}}^{\text{num}}$ y $x_{\text{end}}^{\text{num}}$ de $\tilde{\rho}_\phi$ y $\tilde{\rho}_R$, según los parámetros γ_ϕ , $x_{\text{crit}}^{\text{an}}$ y ω_ϕ escogidos.	55
4.4. Interpolación de la tabla γ_ϕ vs $x^4\tilde{\rho}_R$ para hallar el valor del decaimiento que nos entregue la evolución requerida.	56
4.5. Interpolación de las listas de decaimiento γ_ϕ y $x_{\text{end}}^{\text{num}}$ y hallar sus evoluciones en $\omega_\phi = -1, 0$, y $1/5$	57

Expansión del Universo Temprano en Cosmología No estándar

Vicente Villegas Inostroza

Resumen

En esta tesina se desarrolló un estudio sobre cosmología no estándar. Para comenzar, se partió por describir la cosmología estándar del Universo, mediante el modelo $\Lambda - CDM$ (del inglés: Lambda-Cold Dark Matter), desde la formulación matemática a través de la métrica de FLRW, hasta la Nucleosíntesis primordial. Luego se describió la necesidad de una extensión adhiriendo al modelo la inflación cósmica, puesto que pese a sus exitosas predicciones, existen problemas que arraiga el Modelo Cosmológico. La inflación consta de la existencia de un campo ϕ que expandirá rápidamente el Universo tras una transición a un nuevo mínimo potencial, decayendo después en partículas del modelo estándar, donde a estas escalas de energía se comporta como radiación.

Suponiendo la existencia de una densidad de energía ρ_ϕ bajo distintos comportamientos de su parámetro de estado ω_ϕ en el Universo temprano, se examinó su influencia sobre la evolución de la energía de radiación del Modelo Estándar al decaer en ella, y como al disminuir el periodo de dominación de ρ_ϕ sobre ρ_R a través del aumento de $x_{\text{crit}}^{\text{an}}$, es que se requiere de una tasa de decaimiento Γ_ϕ más alta para que aumente la densidad de energía del modelo estándar ρ_R a los valores requeridos para dar paso a una Nucleosíntesis Primordial exitosa.

Para estudiar las evoluciones de las densidades de energía se utilizó una solución analítica y otra numérica, construidas a partir del programa **Mathematica**, normalizadas respecto al valor que debería tener la densidad de energía del ME luego del decaimiento de ρ_ϕ . Al comparar ambas soluciones se halló una evolución similar de las energías para valores pequeños de $x_{\text{crit}}^{\text{an}}$, sin embargo, a medida que aumenta el valor $x_{\text{end}}^{\text{an}}$, comienza a diferir la solución numérica de la analítica, acortándose el periodo de dominación de $\tilde{\rho}_\phi^{\text{num}}$. Es tal el aumento de $x_{\text{crit}}^{\text{an}}$, que se encontraron valores en los que no se permite un periodo de dominación de $\tilde{\rho}_\phi^{\text{num}}$, pero con un decaimiento de $\tilde{\rho}_\phi$ que incrementa la energía de radiación del

ME hasta los valores requeridos por la Nucleosíntesis Primordial. Además, se hallaron valores del $x_{\text{crit}}^{\text{an}}$ en que no se generaban periodos de dominación de $\tilde{\rho}_\phi$, ni tampoco un decaimiento γ_ϕ para incrementar la densidad de energía del ME. Si bien este comportamiento se repitió para cada valor de ω_ϕ , la variación de este parámetro influyó en el mismo proceso de mantener las soluciones numéricas con una evolución similar a las soluciones analíticas. De forma que un $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 0,1$ para $\omega_\phi = -1$, genera una evolución de las energías que atraviesan por un periodo de dominación de $\tilde{\rho}_\phi$. Sin embargo, para $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 0,1$ con un parámetro de estado $\omega_\phi = 1/5$, no existe ningún periodo de dominación para $\tilde{\rho}_\phi$. De esta forma se concluye que la solución analítica no es una buena aproximación para cualquier valor de $x_{\text{crit}}^{\text{an}}$, encontrándose este con un límite superior para hallar una solución numérica que cumpla con la evolución del modelo cosmológico estándar.

Se estudió además como esta evolución en las densidades de energía afectan a la tasa de expansión del Universo en comparación a una que tasa de expansión estándar sin la densidad de energía $\tilde{\rho}_\phi$ presente, en la que se observó un incremento en la tasa de expansión tras el decaimiento de $\tilde{\rho}_\phi$, para luego seguir el mismo comportamiento que en la cosmología estándar. Debido a las distintas evoluciones que tienen durante un periodo la tasas de expansión estándar y no-estándar, se entiende que la producción temprana de materia oscura (MO) serán distintas, requiriendo de una modificación en su fuerza de interacción de aniquilamiento para que el Universo obtenga la abundancia de MO observada hoy en día.

Capítulo 1

Cosmología Estándar

La cosmología es el estudio del Universo en su nivel más amplio, abarcando así: su origen, cómo la formación y dinámica de sus estructuras más grandes pudieron llegar a formarse, y cuáles son sus posibles destinos. El modelo que se encarga de describir los grandes procesos por los que tuvo que atravesar el Universo para llegar al estado de hoy en día se llama Λ -CDM o modelo cosmológico estándar, explicando los datos experimentales y observacionales de la cosmología [3]

La base desde la que se fundamenta todo el modelo cosmológico, es el Principio Cosmológico, el cual establece que el universo es homogéneo e isotrópico a grandes escalas, es decir, que no importa donde nos encontremos, el universo tiene las mismas características en cada punto del espacio, y no importa la dirección en la que observemos, se verán las mismas propiedades. Básicamente, nos dice que no hay lugares preferenciales en el universo, y por ende, no nos encontramos en ningún punto particular o especial de este, generalizando el Principio de Copérnico.

Hace no más de 100 años se pensaba que el Universo se encontraba estático y que este no evoluciona a través del tiempo, es decir, que siempre ha estado como se observa, y, por tanto, es infinito en el tiempo. Sin embargo, Vesto Slipher fue el primero en descubrir el desplazamiento al rojo en las galaxias, hecho del cual se apoyó Hubble para descubrir que de todas las galaxias que había observado, la mayoría se encontraban alejándose de ‘nosotros’, y que además lo hacían más y más rápido según más lejos estuviesen. Más tarde, se encontró que esta característica estaba presente en cada galaxia, ilustrando así la universalidad de

la expansión.

1.1. Ecuación de Friedmann

La dinámica de un universo en expansión es entonces necesaria para explicar nuestro universo, por lo que la geometría del espacio debe ser explicada a través de una métrica apropiada. La más famosa hoy en día es la métrica de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW), que se establece como el modelo más simple para formar un universo no estático, homogéneo, isotrópico, y en expansión. Se puede expresar en coordenadas esféricas (r, ϕ, θ) como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{(1+kr^2)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (1.1)$$

donde ds corresponde a la distancia entre dos puntos del espacio-tiempo, dt la diferencia de tiempo entre ellos, a se conoce como el factor de escala, indicando como crecen las componentes espaciales en función del tiempo, y k es la curvatura, correspondiente al comportamiento que tendrán las componentes espaciales y que según su valor la geometría del universo adoptará distintas formas. Esta ecuación se puede escribir en forma de tensor como,

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1+kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

y así usarla en la ecuación de campo de Einstein, relacionando el comportamiento o evolución que tendrá el espacio-tiempo (nuestra métrica) en presencia de la materia (el contenido de este) y viceversa. Esta ecuación está dada por

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G T_{\mu\nu}}{c^4} \quad (1.3)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein que contiene la información del espacio-tiempo (la métrica), $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento conteniendo la información sobre lo que está en el espacio-tiempo, y G es la constante de gravitación universal. Para

ser consistentes con la simetría de nuestra métrica y con el principio cosmológico, el tensor energía-momento debe ser diagonal, y por isotropía las componentes espaciales deben ser iguales. El tensor más simple que cumple estas condiciones es el de un fluido perfecto,

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(-\rho c^2, p, p, p) \quad (1.4)$$

caracterizado por una densidad de masa ρ y presión p .

A partir de estos tensores, y el calculo de sus componentes según [4], es que surgen las ecuaciones de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a(t)^2}, \quad (1.5)$$

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) \quad (1.6)$$

Si bien la relatividad general es la forma más rigurosa para obtener las ecuaciones de Friedmann, que describen la expansión del Universo, también pueden obtenerse desde el punto de vista de la teoría Newtoniana de gravedad. Para esto debemos calcular la energía potencial gravitacional y cinética de una partícula de prueba y usar la conservación de la energía.

Asumiendo que el universo se expande uniformemente, con una densidad de masa ρ , siendo esta masa por unidad de volumen, donde podemos tomar cualquier punto como su centro, ya que este debe comportarse de igual forma en todo el espacio. Considerando ahora una partícula a una distancia r del centro con masa m , la cual, debido al teorema de Newton, esta partícula solo siente una fuerza desde el material a radios más pequeños. Este material tiene una masa total dada por $M = 4\pi\rho^2r^3/3$ ejerciendo una fuerza dada por

$$F = \frac{GMm}{r^2} = \frac{4\pi G\rho r m}{3}, \quad (1.7)$$

donde nuestra partícula tiene una energía potencial gravitacional

$$V = -\frac{GMm}{r} = -\frac{4\pi G\rho r m}{3}. \quad (1.8)$$

La energía cinética es fácil; la velocidad de una partícula es \dot{r} dando

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \quad (1.9)$$

La ecuación que describe como cambia la separación r puede ser derivada de la conservación de la energía para esa partícula, esta es

$$U = T + V, \quad (1.10)$$

donde U es constante. Notar que U no debe ser la misma constante para partículas separadas a distancias diferentes. Sustituyendo tenemos

$$U = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4\pi}{3}G\rho r^2 m \quad (1.11)$$

Esta ecuación entrega la evolución de la separación r entre dos partículas. Debemos entender que esta separación puede generalizarse para cualquier par de partículas, ya que el Universo es homogéneo. Esto nos permite cambiar nuestro sistema de coordenadas al sistema de coordenadas comóviles, las cuales llevan consigo la expansión. Debido a que la expansión es uniforme, la relación entre distancia real \vec{r} y la distancia comóvil \vec{x} pueden ser escritas como

$$\vec{r} = a(t)\vec{x}, \quad (1.12)$$

donde la propiedad de homogeneidad nos asegura que a esté solo en función del tiempo. Para visualizar esta ecuación, debemos pensarla como una cuadrícula de coordenadas que se expande con el tiempo. Si bien la distancia entre galaxias está cambiando, en coordenadas comóviles la distancia entre galaxias permanecerá fija. La cantidad $a(t)$ se conoce como el factor de escala del Universo, y mide la tasa de expansión universal, diciéndonos como las separaciones físicas están creciendo con el tiempo, ya que las coordenadas \vec{x} están fijas por definición.

Podemos usar el factor de escala para reescribir la ecuación de U considerando la expansión. Sustituyendo la ecuación anterior con U , y notando que $\dot{x} = 0$, obtenemos

$$U = \frac{1}{2}m\dot{a}^2 x^2 - \frac{4\pi}{3}G\rho a^2 x^2 m \quad (1.13)$$

Multiplicando cada lado por $2/ma^2x^2$ y reordenando los términos tenemos

$$\frac{\dot{a}^2(t)}{a(t)^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a(t)^2} \quad (1.14)$$

donde $kc^2 = -2U/mx^2$. Esta es la forma estándar de la ecuación de Friedmann, y es la misma que se deduce de los tensores de la ecuación de campo de Einstein. Ya que $k = -2U/mc^2x^2$ es independiente del tiempo, significa que será una constante, con unidades de $[longitud]^{-2}$. Básicamente el significado de nuestra expansión se aplica a objetos que se encuentran en escalas de separación tan grandes que su movimiento se rige por la homogénea distribución de materia en la que se encuentra. Esto no aplica para distancias gobernadas por la atracción gravitacional de estrellas, como la Tierra con el Sol.

Si bien tenemos la Ec. de Friedmann para explicar la expansión del Universo y como las distancias se ven afectadas, necesitamos entender como se desenvolverá la materia ante estas condiciones en el tiempo. para realmente tener una visión sobre como llego a su estado actual (el Universo). Para ello se requiere de la ecuación de fluido, la cual podemos obtener a través de aplicar la primera Ley de la Termodinámica a un volumen V que se está expandiendo con un radio comóvil a , visto en [1] para obtener

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0 \quad (1.15)$$

Aquí los términos que influyen en el cambio de densidad son los contenidos en paréntesis. El primero equivale a la pérdida de densidad debido al incremento de volumen, mientras que el otro a la pérdida de energía por la presión del material hecha a medida que aumenta el volumen del Universo. De esta forma tenemos una ecuación que nos dicta la evolución de ρ si es que conocemos la presión del material.

La ecuación de estado es aquella fórmula que nos relaciona una presión específica para cada densidad según el tipo de materia que se considere.

Además de la ecuación de Friedmann y la ecuación de fluido, podemos hacer uso de ambas para obtener la llamada ecuación de aceleración de Friedmann. Para ello, diferenciamos la ecuación 1.14 respecto al tiempo y obtenemos

$$2\frac{\dot{a}}{a}\frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\dot{\rho} + 2\frac{kc^2\dot{a}}{a^3} \quad (1.16)$$

Luego, sustituyendo $\dot{\rho}$ por la ecuación de fluido, cancelando el factor $2\dot{a}/a$ se tiene

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -4\pi G \left(\rho + \frac{p}{c}\right) + \frac{kc^2}{a^2}, \quad (1.17)$$

donde podemos reconocer el término de la ecuación de Friedmann, y así reemplazar por la ecuación 1.14, obteniendo finalmente

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right), \quad (1.18)$$

la ecuación que describe la aceleración del factor de escala. En ella se puede ver que si existe presión en el material, la fuerza gravitacional aumenta y, por tanto, la expansión se desacelera más rápido. La densidad de masa ρ y energía ϵ están relacionadas vía $\epsilon = \rho c^2$. En adelante se usarán las ‘unidades naturales’, donde c^2 es igual uno, para escribir la ecuación de Friedmann sin el término c^2 .

1.2. Geometría del Universo

Para resolver la ecuación de Friedmann y entender la evolución de la materia contenida en el Universo, debemos conocer el verdadero significado de la constante k , el cual dentro de la relatividad general es aquel parámetro que mide la curvatura del espacio. Debido a que el modelo establece un universo isotrópico y homogéneo, se tuvo que establecer cuáles eran las posibles curvaturas que cumplieran con esto, de las cuales se encontraron tres posibles geometrías para el universo, según k tenga valor positivo, negativo o nulo.

- La geometría plana es la más simple, está basada en los axiomas de la geometría euclidiana, y podemos destacarle aquel que dice que rectas paralelas permanecen a la misma distancia”. Un universo con esta forma sería infinito en extensión, ya que un borde violaría el principio que debe verse igual desde cualquier punto. Para obtener tal geometría, el valor de k debe ser 0.

- La geometría esférica es aquella que rompe con el axioma de que las rectas paralelas permanecen a una distancia fija, correspondiendo a un tipo de geometría no-euclidiana, la cual puede entenderse, por ejemplo, con la superficie de la Tierra. En esta podemos observar la curvatura del espacio al ver, por ejemplo, que las líneas de longitud son paralelas en el ecuador, pero según avanzan a los polos su separación se vuelve nula. Si bien la curvatura de la que hablamos es en una superficie de 2 dimensiones, debemos extrapolarla a nuestro universo de 3 dimensiones, pues nos es imposible visualizar tal curvatura. Este Universo tendrá un tamaño *finito* pero *sin límites*, manteniendo así los principios del modelo cosmológico, y donde si se viaja en línea recta, en algún momento volverás al mismo punto pero desde la dirección opuesta. Para esta geometría se deben escoger valores positivos de k .
- Finalmente, la geometría hiperbólica, la cual se obtiene con valores negativos de k , es la menos intuitiva para visualizar isotropía, sin embargo, la tiene. En ella las líneas paralelas nunca se cruzan, de hecho divergen, y, por tanto, debe ser infinito en extensión. Se le llama universo abierto.

1.3. Modelos Cosmológicos

Los distintos modelos de expansión que puede adoptar el universo estarán dados por el tipo de material que contenga, esto se logra con la ecuación que relaciona la densidad de masa ρ y la presión p , la llamada ecuación de estado

$$p = \omega\rho, \quad (1.19)$$

donde ω distintos valores, según el comportamiento que tenga la materia, donde por ejemplo, $\omega = -1$ corresponde a la energía oscura, $\omega = 0$, a la materia no-relativista como el polvo frío, y $\omega = 1/3$ a un comportamiento relativista de la materia. De esta forma, la ecuación de fluido tendrá la forma

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1 + \omega)\rho = 0 \quad (1.20)$$

Resolviendo esta ecuación a través de separación de variables se obtiene una solución para ρ que nos establece una relación de proporcionalidad

$$\rho \propto \frac{1}{a^{3(1+\omega)}} \quad (1.21)$$

Para el caso de materia la evolución tendrá la proporción $\rho \propto 1/a^3$, mientras que para la radiación será $\rho \propto 1/a^4$, por lo que la densidad de materia decaerá más lentamente que la densidad de radiación. Además, reescalando $a = 1$ para el tiempo presente, las densidades se expresarán respecto a la densidad presente como $\rho = \rho_0/a^3$ (materia) y $\rho = \rho_0/a^4$ (radiación). Sustituyendo, por ejemplo, la densidad de materia en la ec. 1.14 con $k = 0$, se tiene

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \frac{1}{a} \quad (1.22)$$

En cosmología, la dependencia del tiempo para el factor de escala a usada es $a \propto t^q$, la cual aplicada a la ec. 1.22, nos lleva a que la solución exista si $q = 2/3$ (la dependencia del tiempo en ambos lados de la ecuación debe coincidir). De manera análoga para la radiación, se halla que la evolución de ambas densidades respecto al tiempo será

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3} \quad (\text{materia}), \quad (1.23)$$

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/2} \quad (\text{radiación}). \quad (1.24)$$

Esto nos dice que en ambos casos el universo se expandirá por siempre, pero que esta expansión se hará cada vez más lenta, hasta llegar a un punto de estancamiento. Además, para el caso de radiación dominante la expansión será más lenta que para la dominación de materia. Ver esta evolución desde el punto de vista de mezcla es algo más apropiado a la realidad, donde uno de los dos dominó en el comienzo. Sea cual sea el caso, en lo que resulta esta evolución es en una inevitable dominación de la materia, pues en ambos casos la densidad de radiación decae más rápido que la de materia. Un universo plano, entonces ya sea dominado por radiación o materia en su comienzo, se expandirá por siempre con una tasa que va decreciendo con el tiempo y que es dominada por la materia no-relativista.

Retomando el término de curvatura en la ec. de Friedmann, y usando la constante de Hubble $H = \dot{a}/a$, es que se puede reescribir la ecuación 1.14 como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (1.25)$$

donde se puede notar que si k es negativo solo contribuirá a la expansión. El término k/a^2 decrece más lento con la expansión que $\rho_{\text{mat}} \propto 1/a^3$ o $\rho_{\text{rad}} \propto 1/a^4$, por lo que su existencia pasará a dominarla eventualmente con

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2}. \quad (1.26)$$

Lo cual tendrá una solución $a \propto t$, por lo que cuando domine, la expansión se hará más rápida y la velocidad no tenderá a 0, sino que se volverá constante. En cambio, si la curvatura es positiva, su eventual dominación igualará y superará el término de densidad, deteniendo la expansión para luego recolapsar por la atracción gravitacional.

Un parámetro fundamental para entender la geometría del Universo es a través de la densidad crítica, que consiste en la densidad que debe tener el universo para que este sea plano. Para ello, usamos $k = 0$ en la ecuación de Friedmann reescrita para H , y despejamos ρ . Esta corresponde a la densidad ρ_c dada por

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (1.27)$$

La ecuación depende del tiempo, ya que H cambia con el tiempo. Aunque con los valores observados hoy en día de $H_0 = 100h \text{ kms } s^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, y $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ seg}^{-2}$ [1], podemos obtener la densidad crítica actual, la cual expresada en masas solares y Megaparsecs, queda como

$$\rho_c(t_0) = 2,78h^{-1} \times 10^{11} \text{ M}_{\odot} / (\text{h}^{-1} \text{ Mpc})^3. \quad (1.28)$$

Esta densidad crítica es comparable a las masas de las galaxias y a las distancias típicas entre ellas, por lo que debe ser una buena aproximación para la densidad del Universo. El universo no tiene que ser necesariamente plano, pero con esta densidad obtenemos una escala natural para las posibles densidades llamada densidad de parámetro Ω , definida como

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho}{\rho_c}. \quad (1.29)$$

Escribiendo la Ec. de Friedmann en términos de la densidad crítica y luego a esta última en términos de H obtenemos

$$H^2 = H^2\Omega - \frac{k}{a^2} \quad (1.30)$$

La cual podemos reescribir como

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (1.31)$$

Si $\Omega = 1$ implica que $k = 0$, como nuestro universo contiene varios tipos de materia, podemos separar nuestro Ω en las componentes $\Omega_{\text{rad}}, \Omega_{\text{mat}}$, etc. Incluso podemos hallar una densidad de parámetro para el término de curvatura, escrito como

$$\Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2}. \quad (1.32)$$

1.3.1. Constante Cosmológica

La constante cosmológica es un término permitido por la relatividad general, la cual en primera instancia Einstein agregó para formar un Universo estático, sin embargo, esta situación es inestable ante pequeñas perturbaciones, por lo que no es viable en el Universo. A pesar de esto, su inclusión entrega resultados importantes en la cosmología. Dentro de la ecuación de Friedmann, el término se agrega como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.33)$$

Lo cual nos entrega la ecuación de aceleración

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.34)$$

Si la constante cosmológica es positiva, contribuirá en la aceleración del factor de escala, y debido a que no se diluye con la expansión, pasará a dominarla y así posiblemente explicar la aceleración observada. Podemos hallar una densidad de parámetro para la constante cosmológica como

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad (1.35)$$

y así representar la Ecuación de Friedmann en término de sus parámetros de densidad

$$\Omega + \Omega_\Lambda - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}, \quad (1.36)$$

donde el caso de un universo plano nos lleva a

$$\Omega + \Omega_\Lambda = 1 \quad (1.37)$$

Podemos describir Λ como un fluido con densidad ρ_Λ y presión p_Λ . de esta forma, la ecuación de fluido para Λ será

$$\dot{\rho}_\Lambda + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho_\Lambda + \frac{p_\Lambda}{c^2} \right) = 0. \quad (1.38)$$

Como la densidad se debe mantener constante por definición, en la ec. de fluido debemos tener que

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2, \quad (1.39)$$

la se puede interpretar como la presión de energía del espacio vacío.

Los modelos cosmológicos mencionados se ven afectados por la presencia de la constante cosmológica. En el caso de un universo cerrado ya no es necesario que recolapse, o en el de uno abierto que se expanda por siempre. De hecho, si es lo suficientemente potente, no es necesario siquiera un Big Bang, comenzando el universo desde una fase recolapsada y rebotando en un tamaño finito bajo la influencia de la constante cosmológica. O también una fase que permanezca casi estática según el arreglo de parámetros. Debido a que el parámetro de Hubble solo entrega un factor de escala general, se parametrizan modelos a través de la densidad de materia presente y de la constante cosmológica que se observan en la figura 1.1.

1.4. Materia Oscura

Dentro del parámetro de densidad Ω_0 conteniendo la densidad total de materia en el Universo es de importancia conocer su valor y como se divide este entre las distintas densidades de energía. Como se dijo anteriormente, haciendo

una estimación cruda de la densidad del universo a través de las galaxias y sus distancias, se ve que no puede estar muy lejos de la densidad crítica ρ_c . Al estudiar la suma de los distintos términos que se adhieren al parámetro de densidad Ω se llega a la conclusión que la materia bariónica no es capaz de suplir la densidad crítica. Por ejemplo, una estimación de la masa total de estrellas entrega una densidad

$$\Omega_{\text{est}} \equiv \frac{\rho_{\text{estrellas}}}{\rho_c} \simeq 0,005. \quad (1.40)$$

Mientras que una medición más completa a través de la abundancia de elementos observada nos da una estimación de materia bariónica de [1]

$$0,021 \leq \Omega_B h^2 \leq 0,025, \quad (1.41)$$

que nos dice que hay esencialmente mayor materia bariónica en el Universo que el de solo las estrellas, donde la materia bariónica corresponde a protones y neutrones. Además, la ecuación contiene la constante de Hubble h que si bien tiene incertidumbre, sus posibles rangos están muy lejos para llegar a tener una densidad crítica hecha de pura materia bariónica.

Además de estos datos, cuando se estudia el movimiento de objetos astronómicos se puede observar que el material visible es insuficiente para ejercer la fuerza gravitacional "inferida". El estudio de las curvas de rotación de galaxias es un claro ejemplo de esto, ya que la velocidad de las estrellas a través de un disco en una galaxia espiral está dada por

$$v = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}}, \quad (1.42)$$

donde R corresponde al radio del disco y $M(R)$ es la masa de la galaxia. La masa $M(R)$ deja de contribuir en la atracción gravitacional, haciéndose constante en la ecuación, por lo que la velocidad debería decaer como la raíz cuadrada de R . Sin embargo, a grandes distancias la rotación mapeada por gas interestelar entrega una velocidad que queda constante. Estas velocidades pueden llegar a ser 3 veces más grandes que las predichas por la materia luminosa, implicando que hay 10 veces más materia de la que se está observando. Esto es un ejemplo de **materia oscura**, la cual con estimaciones estándar, entregan un parámetro de densidad

$$\Omega_{\text{halo}} \simeq 0,1, \quad (1.43)$$

donde ‘halo’ hace referencia al bulbo de materia oscura en la que cada galaxia debería estar sumergida. Se sugiere que esta densidad de materia oscura se encuentre en una nueva forma de materia, que no es bariónica e interactúa extremadamente débil con la materia ordinaria.

Existen varias hipótesis para la producción de la materia oscura, con dos de las más populares siendo el mecanismo de freeze-out y el de freeze-in. Brevemente, el freeze-out corresponde al escenario en que la materia oscura se encontraba en equilibrio térmico con el plasma primordial y en grandes cantidades en el Universo, tras desacoplarse de este debido a la disminución de temperatura y producto de la expansión del Universo, es que su densidad disminuye hasta congelarse en el tiempo en la abundancia observada de hoy en día. Mientras que en el mecanismo de freeze-in, el Universo comienza con una densidad de materia oscura despreciable, donde las partículas de MO nunca entran equilibrio térmico con las partículas del ME debido a la débil interacción que poseen. De esta forma, la producción de materia oscura producto de las partículas del ME en equilibrio térmico, cesará producto de la expansión del Universo y de la disminución de la temperatura, congelándose así la abundancia de materia oscura.

1.5. Fondo Cósmico de Microondas (CMB)

El fondo cósmico de radiación es una de las pruebas más contundentes de un Universo en expansión y siendo más específico del Big Bang Caliente. En 1965 se descubrió que la Tierra está constantemente recibiendo una radiación desde todas direcciones, la cual toma la forma de una función de cuerpo negro con temperatura

$$T_0 = 2,725 \pm 0,001 \text{ K.} \quad (1.44)$$

Cuando partículas están interactuando frecuentemente, igualando las producciones en ambas direcciones, su energía puede ser descrita por equilibrio termodinámico. En el caso de los fotones (bosones), tenemos que su densidad de energía ϵ en un intervalo de frecuencias df sobre la frecuencia f es

$$\epsilon(f)df = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3 df}{\exp(hf/k_B T) - 1}, \quad (1.45)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann y h la constante de Planck. Al integrar esta ecuación sobre todas las frecuencias se obtiene una densidad de energía de radiación

$$\epsilon_{\text{rad}} \equiv \rho_{\text{rad}} c^2 = \alpha T^4 \quad (1.46)$$

α como constante de radiación definida por

$$\alpha = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 \hbar^3 c^3} = 7,565 \times 10^{-16} \text{ Jm}^{-3} \text{K}^{-4}, \quad (1.47)$$

donde $\hbar = h/2\pi$ es la constante reducida de Planck. Debido a que la radiación evoluciona como $\rho_{\text{rad}} \propto 1/a^4$, que la dependencia de la temperatura respecto al factor de escala será

$$T \propto \frac{1}{a}. \quad (1.48)$$

Lo que significa que el Universo se enfría mientras se expande, por lo que si hoy se encuentra aproximadamente a 3 K, en sus etapas iniciales el Universo tuvo que estar mucho más caliente. Debido a esto, su distribución térmica también evolucionó, pero con una frecuencia decayendo en proporción a $1/a$ debido al redshift, por lo que hoy se observa la misma distribución pero a menor temperatura. El origen que tendría esta radiación surge de la energía mínima para ionizar un átomo de hidrógeno, la cual en el estado basal es de 13.6 eV. Tomando 1,48 podemos ver que cuando el universo tenía una millonésima de su tamaño, contenía una temperatura $T = 3 \times 10^6$ K, destruyendo cualquier enlace entre electrón y protón. A medida que se fue expandiendo y enfriando, los fotones dejaron de tener la energía suficiente para ionizar átomos, comenzando así la recombinación, etapa en la que por primera vez los electrones se unen con los núcleos. Esto continúa hasta el punto en que todos los electrones se combinan y los fotones cesan completamente de dispersarlos, viajando ininterrumpidamente a través de la evolución del Universo. Este proceso es conocido como desacoplamiento.

1.6. Nucleosíntesis

La nucleosíntesis es el proceso por el cual los núcleos atómicos comenzaron a formarse en el Universo, cuando los fotones dejaron de tener la energía suficiente

para romper la energía de enlace nuclear, que se encuentra alrededor de 1 MeV, temperatura 10^5 veces más grande que el enlace de electrones. En el momento que protones y neutrones dejan de ser relativistas por la caída de temperatura, obedecerán una distribución de Maxwell-Boltzmann que entregará las densidades relativas neutrón-protón según la temperatura

$$\frac{N_n}{N_p} = \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{(m_n - m_p)c^2}{k_B T}\right] \quad (1.49)$$

Con el tiempo las reacciones que producen neutrones en protones y viceversa se detendrá por la expansión y la densidad relativa quedará aproximadamente en $1/5$ [1]. Luego de esto comienza la producción de elementos ligeros (D, ^3He , ^4He), los cuales a medida que se creaban, neutrones decaían, esto hasta que todos se acoplaron a un núcleo. En el universo temprano, los elementos que se produjeron en abundancia fueron el hidrógeno y el helio-4. El último porque es el núcleo ligero más estable y el otro debido a que no hay suficientes neutrones para unirse a todos los protones. Luego se puede calcular la fracción de masa total en helio-4, que nos dice que un 24% de la materia total está compuesta de helio-4. Manteniendo entonces la conexión total de reacciones nucleares se puede estimar la abundancia de todos los elementos ligeros.

Hay 2 parámetros que pueden modificar la abundancia de elementos: el número de especies de neutrinos sin masa por un lado, que afecta la salida de las reacciones nucleares del equilibrio térmico. Y la densidad de materia bariónica de la cual los núcleos se componen. En la teoría del Big Bang caliente el acuerdo con la abundancia de elementos es posible, solo si es que las especies de neutrinos son 3, lo que coincide así con las especies de neutrinos que se sabe que existen (eléctrico, muónico, y tauónico). Con esto, el modelo del Big Bang reproducirá las abundancias si es que la densidad de materia bariónica se encuentra en el rango [1]

$$0,021 \leq \Omega_b h^2 \leq 0,025 \quad (1.50)$$

donde h , medido por el proyecto SH0ES por ejemplo, es de $h = 0,75 \pm 0,03$.

1.7. Inflación

En 1981 fue propuesta la inflación cósmica, una expansión que dominó las etapas más tempranas del Universo, antes de la evolución estándar del Big Bang Caliente. Fue creada como una solución para algunos aspectos insatisfactorios de esta teoría, sin embargo, mantiene las condiciones para una exitosa nucleosíntesis y formación de CMB, por lo que se considera como una idea adicional a esta. Básicamente, la expansión inflacionaria corresponde a un periodo en que el factor de escala estaba acelerando, por lo que si vemos la ecuación de aceleración

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right), \quad (1.51)$$

se puede notar que $\rho c^2 + 3p < 0$. Y dado que asumimos siempre una densidad positiva, se necesita una presión negativa,

$$p < -\frac{\rho c^2}{3}. \quad (1.52)$$

Un ejemplo de la expansión inflacionaria es la constante cosmológica Λ que corresponde a un universo que tiene un fluido con $p = -\rho c^2$. En la Ecuación de Friedmann que contiene la constante cosmológica,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.53)$$

luego de un tiempo debido a la dilución que tienen por la expansión, ρ y k serán despreciables y la ecuación de Friedmann (EF) se volverá,

$$H^2 = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.54)$$

Resolviendo la ec. para a en el tiempo, llegamos a la solución,

$$a(t) = \exp \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \right). \quad (1.55)$$

Esto implica una exagerada tasa de expansión cuando domina la constante cosmológica en comparación a los demás casos vistos. Luego de un tiempo, la inflación debe llegar a su fin, convirtiendo la energía de la constante cosmológica en materia convencional, tal y como una partícula decayendo en otra. En modelos típicos la inflación sucede alrededor de 10^{-34} seg, en escalas de energía de la Gran Unificación, sin interponerse así con la Teoría del Big Bang.

1.7.1. Problemas de la teoría del Big Bang

Es a través de esta fase de expansión exponencial que se plantea resolver diferentes aspectos de la teoría del Big Bang que no han sido resueltos. Algunos de estos problemas y como se solucionan mediante la inflación son:

Problema de planitud

Sabemos que el universo posee una densidad de material total $\Omega_{\text{tot}} = \Omega_0 + \Omega_\Lambda$, la cual se encuentra en un rango $0,5 \leq \Omega_{\text{tot}} \leq 1,5$, cercano a la densidad crítica. Esto significa que el Universo está muy cerca de poseer una geometría plana, sin embargo, podemos notar que esta situación resulta inestable al estudiar como evoluciona Ω_{tot} con el tiempo en la ec.

$$|\Omega_{\text{tot}}(t) - 1| = \frac{|k|}{a^2 H^2}. \quad (1.56)$$

En el caso de que la materia o radiación estén dominando la evolución del universo por sobre la curvatura o la constante cosmológica, podemos encontrar la dependencia en el tiempo de $a^2 H^2$ a través de las ecuaciones , lo que nos entrega

$$a^2 H^2 \propto t^{-1} \text{ dominación de radiación;} \quad (1.57)$$

$$a^2 H^2 \propto t^{-2/3} \text{ dominación de materia.} \quad (1.58)$$

Que nos llevan a

$$|\Omega_{\text{tot}} - 1| \propto t \text{ dominación de radiación;} \quad (1.59)$$

$$|\Omega_{\text{tot}} - 1| \propto t^{2/3} \text{ dominación de materia.} \quad (1.60)$$

En ambos casos la diferencia entre Ω_{tot} y 1 está incrementando con el tiempo, por lo que si existe cualquier curvatura, esta crecerá cada vez más. Sin embargo, las observaciones nos dicen que el Universo está muy cercano de ser plano hoy en día, por lo que este tuvo que estar en una situación de extrema planitud en su inicio para conservarla. Un ejemplo de que tan plano tuvo que estar el Universo es tomando la nucleosíntesis, por ejemplo ($t = 1$), que con la restricción de hoy $t_0 \simeq 4 \times 10^{17}$ seg, se necesitará una ecuación de densidad con $|\Omega_{\text{tot}} - 1| \leq 10^{-18}$, lo que nos deja un rango muy restringido para Ω_{tot} .

Lo que genera la inflación, es revertir el incremento con el tiempo de la ecuación (ec. de friedmann reescrita) al tener una aceleración positiva, ya que

$$\ddot{a} > 0 \implies \frac{d}{dt}(\dot{a}) > 0 \implies \frac{d}{dt}(aH) > 0. \quad (1.61)$$

De esta forma, el valor de Ω_{tot} cada vez se acercará más a 1 en vez de alejarse,

El problema del horizonte

El fondo cósmico de microondas es altamente isotrópico, donde la luz que se mide en este tiene casi la misma temperatura de 2.725 K . Para que esto suceda tienen que estar en equilibrio térmico, sin embargo, las luces que nos llegan desde direcciones opuestas no se han encontrado desde el desacoplamiento, por lo que no han tenido tiempo para interactuar y establecerlo. Esto empeora, pues antes de que ocurriera el desacoplamiento, el camino libre medio de los fotones era muy corto para que termalizaran, por lo que tuvo que suceder aún antes. Por último, el CMB no es perfectamente isotrópico, contiene pequeñas fluctuaciones (una parte en 10^5 según el satélite COBE). Se piensa que estas son las ‘semillas’ de las cuales las grandes estructuras del Universo surgen, esto es un problema, pues en la teoría estándar del Big Bang no se permiten teorías que generen perturbaciones semilla.

Este se arregla con la inflación incrementando una región del Universo mientras mantiene la escala de Hubble fija. De esta forma, una pequeña parte del Universo que haya alcanzado el equilibrio térmico, puede expandirse a un tamaño más grande que nuestro Universo observable actual, ligando así las microondas de direcciones opuestas a que estuvieron en algún momento en equilibrio. Además, esta permite generar irregularidades que lleven a la formación de estructuras en el Universo.

De esta forma, la expansión acelerada que plantea la inflación nos resulta muy útil para resolver los problemas cosmológicos. Sin embargo, simplemente postular una constante cosmológica (como este caso) que decaiga después de haber hecho su trabajo está demasiado orquestado. Es necesario, un modelo confiable que contenga una hipótesis razonable para originar la inflación y llevarla a su fin, que no se interponga con el inicio de la bien estudiada nucleosíntesis, la cual

sucede alrededor de 1 seg de edad del Universo. Una idea son las transiciones de fase, que corresponden a cambios dramáticos en las propiedades de un sistema físico cuando se calienta o enfría. Estas son controladas a través de los campos escalares, los cuales pueden comportarse con presiones negativas para llevar a cabo una expansión. Luego de que este campo acabe su transición de fase, decaerá y la inflación acabará.

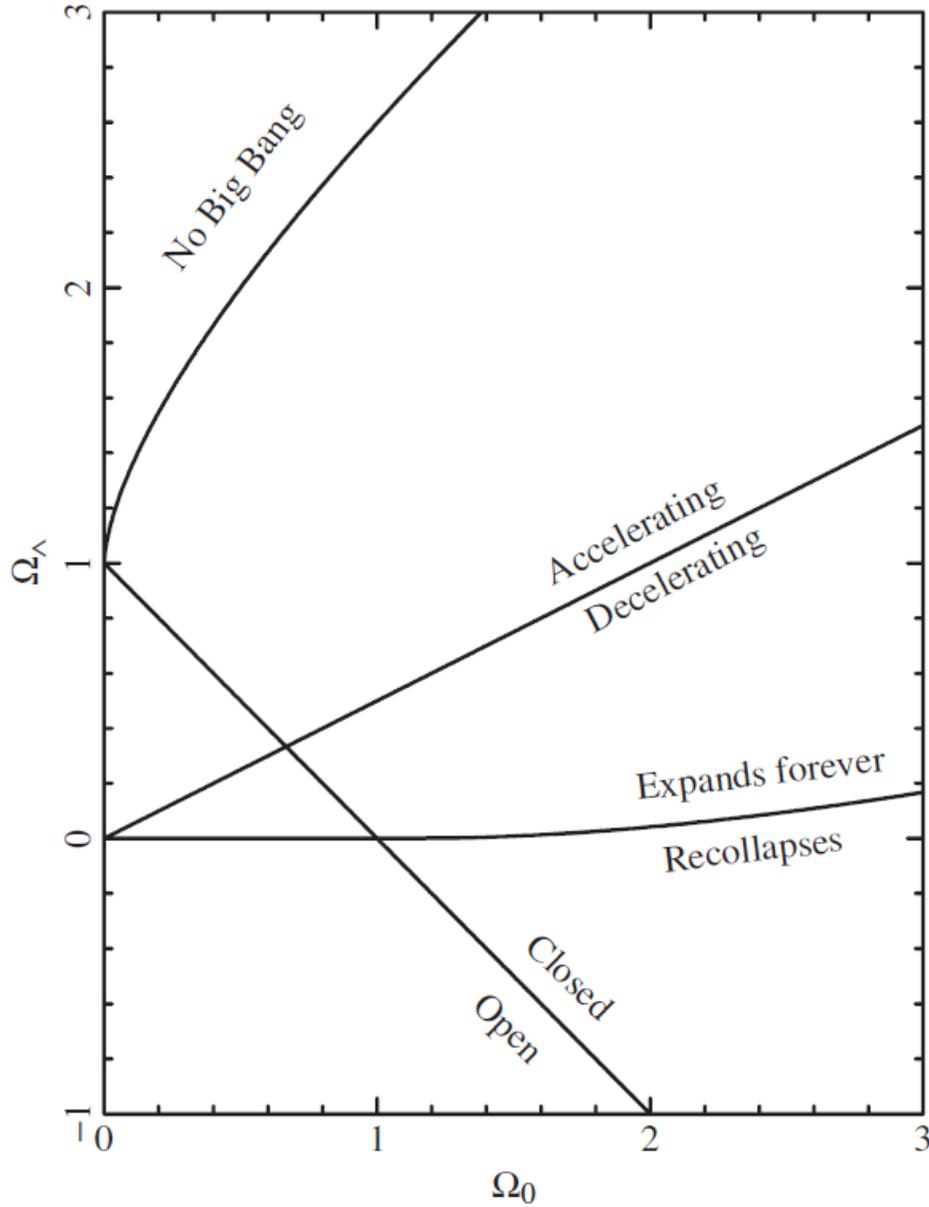


Figura 1.1: Plano que muestra las densidades de materia Ω_0 y de la constante cosmológica Ω_Λ para identificar los distintos modelos del Universo. La figura muestra las propiedades principales en regiones diferentes, donde las etiquetas indican el comportamiento en cada lado de las líneas divisorias.[1]

Capítulo 2

Cosmología No Estándar

La idea básica de la inflación, es que durante un periodo de tiempo, la energía del vacío era la componente dominante del Universo, la cual genera una expansión exponencial del factor de escala. Durante esta época, una pequeña, suave y coherente región de tamaño menor a H^{-1} puede crecer a tal tamaño, que abarque fácilmente el volumen comóvil que se convierte en el Universo Observable de hoy en día. Luego de la rápida expansión, la energía de la inflación debe decaer en energía del ME, generando un recalentamiento en el Universo, el cual estudiaremos a través del comportamiento de su materia y el periodo durante el que decayó.

2.1. Mecanismos Inflacionarios

La idea de la inflación es considerarla como una transición de fase de su potencial de energía, el cual encontrándose en una escala de energía σ o superior, tiene un potencial $V(\phi)$ minimizado en $\langle\phi\rangle = 0$. Este, en una primera transición de orden, desarrolla un segundo mínimo para $\langle\phi\rangle = \sigma \neq 0$ a medida que su temperatura decae a hacia un valor crítico T_{crit} , el cual tras bajar de este convertirá su nuevo mínimo potencial en el mínimo global. La transición desde $\langle\phi\rangle = 0$ a $\langle\phi\rangle = \sigma$ no sucede inmediatamente, sino que depende de la dinámica el campo ϕ . La evolución del campo ϕ al verdadero vacío está dada por la ecuación

de movimiento clásico [5]

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (2.1)$$

correspondiente a una bola con fricción rodando una colina cuesta abajo (que en este caso corresponde a la expansión del Universo), donde además se consideró su ecuación de estado en $\omega = 0$. Durante el tiempo que evoluciona el campo ϕ a σ , el Universo es dotado de una enorme cantidad de energía del vacío ρ_{vac} , la cual una vez que la temperatura caiga por debajo de T_c , comenzará a dominar la densidad de energía del Universo. Cuando esto ocurre, el Universo comienza su expansión exponencial (llamada fase de de Sitter), la cual es descrita en la sección 1.7 con un factor de escala

$$a(t) = \exp(Ht). \quad (2.2)$$

De esta forma, si suponemos que el tiempo de evolución de ϕ desde 0 a σ es de $\Delta t = 100H^{-1}$, con un tiempo de expansión de escala $H^{-1} = 10^{-34}$ seg, el tiempo de ruedo será $\Delta t \simeq 10^{-32}$ seg, y habiendo aumentado el factor de escala en un factor de 3×10^{43} . Si bien todo esto sucede aceleradamente en tiempos muy cortos, el tiempo de bajada será lento en comparación al de escala, refiriéndose a este periodo como ‘slow-rollover’, siendo una característica clave para los modelos viables de inflación.

Mientras ϕ se acerca al valor mínimo del potencial, este último se empina y la evolución de ϕ se acelera hasta sobrepasar el mínimo de su potencial y oscilar sobre $\phi = \sigma$ en una escala de tiempo corta comparada al tiempo de Hubble. La enorme energía del vacío del inflatón (ϕ) existe en la forma de oscilaciones coherentes espaciales del campo ϕ [5], correspondiendo a un condensado de partículas ϕ de cero-momentum. El decaimiento de estas partículas a otras de campos más ligeros a los que se acopla, amortiguará estas oscilaciones. Y a medida que se termalizan las partículas producidas por decaimiento de ϕ el Universo sufre un recalentamiento. La evolución del campo ϕ desde 0 a σ es ilustrada en la figura 2.1

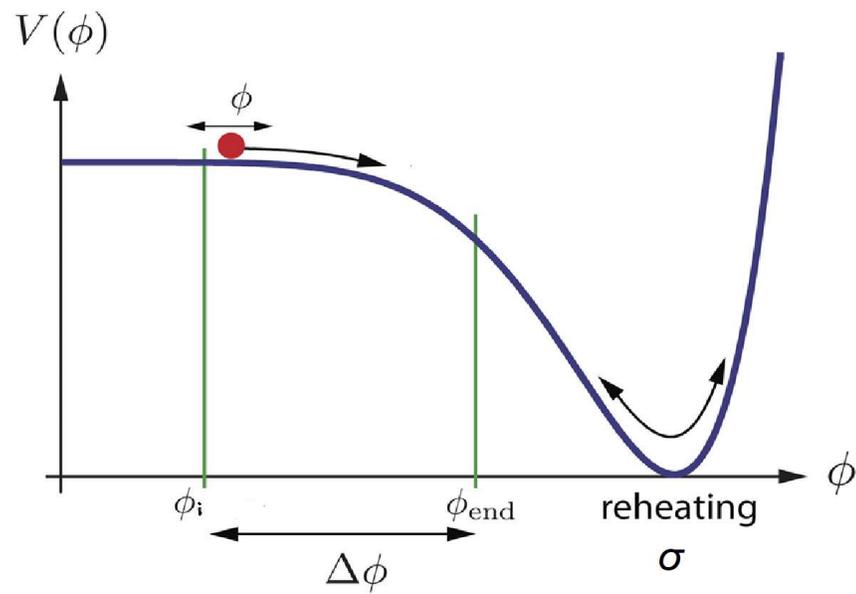


Figura 2.1: Ejemplo de un potencial de inflatón $V(\phi)$ vs ϕ que ilustra el ‘slow-roll’ desde un valor ϕ_i hasta ϕ_{end} para luego oscilar coherentemente sobre el mínimo del potencial en σ y generar el recalentamiento, convirtiendo la energía del inflatón en radiación [2].

2.1.1. Inflación como un campo escalar dinámico

Como se ha entendido, la inflación envuelve una evolución dinámica de un campo escalar ϕ débilmente acoplado que en algún momento fue desplazado del mínimo de su potencial. Además, se asume que ϕ solo decae en radiación del ME con una tasa Γ_ϕ . La densidad Lagrangiana de un campo escalar ϕ mínimamente acoplado, es dada por [5]

$$\mathcal{L} = \dot{\phi}^2/2 - V(\phi), \quad (2.3)$$

de la cual se puede obtener la ec. de movimiento variando la acción ($S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}$)

con un tensor de energía

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \mathcal{L} g^{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

el cual toma la forma de un fluido perfecto, ya que ϕ es espacialmente homogéneo, y con una densidad de energía y presión dadas por

$$\rho_\phi = \dot{\phi}^2/2 + V(\phi) \quad (2.5)$$

$$p_\phi = \dot{\phi}^2/2 - V(\phi) \quad (2.6)$$

Para obtener la ecuación de movimiento de ρ_ϕ se utiliza la conservación de energía-momentum ($T^\mu{}_\nu = 0$) dada en [5], y así conseguir

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \Gamma_\phi \dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (2.7)$$

en la que el término Γ_ϕ surge, ya que las oscilaciones coherentes sobre σ corresponden a un condensado de partículas ϕ de momento-cero, que decaen debido a la creación de partículas de otros campos que se acoplan a ϕ . Durante estas oscilaciones, el campo ϕ evoluciona rápidamente en la escala de tiempo de expansión, y el ciclo de oscilación de $\dot{\phi}^2$ puede escribirse como [5]

$$\langle \dot{\phi}^2 \rangle = \rho_\phi. \quad (2.8)$$

Sustituyendo la ec. 2.8 en la ec. 2.7, y multiplicándola por $\dot{\phi}$ nos queda expresada en términos de su densidad de energía como

$$\dot{\rho}_\phi + 3H\rho_\phi + \Gamma_\phi \rho_\phi = 0. \quad (2.9)$$

Notar que esta corresponde a la ec. de Boltzmann que gobierna el decaimiento de una partícula masiva.

2.1.2. Evolución No estándar

Como vimos anteriormente, la ec. 2.9 nos permite estudiar la evolución que tendrá ρ_ϕ para el caso de una partícula no relativista. Sin embargo, podemos generalizar el estudio a distintos comportamientos de ρ_ϕ a través del parámetro de la ecuación de estado $\omega \in [-1, 1]$, con $\omega = p_\phi/\rho_\phi$. Esto nos lleva a que la ec. 2.9 de la densidad de energía ρ_ϕ sea

$$\dot{\rho}_\phi + 3(1 + \omega_\phi)H\rho_\phi = -\Gamma_\phi\rho_\phi, \quad (2.10)$$

con $\omega_\phi = 0$ para el caso visto en la subsección 2.1.1. Si esta densidad de energía solo decae en radiación del modelo estándar, que tiene un comportamiento relativista con $\omega = 1/3$ y de la cual se asume que mantiene un equilibrio interno durante el Universo temprano, implica que la evolución de su densidad, de forma análoga a la ec. 2.9 estará dada por [6]

$$\dot{\rho}_R + 4H\rho_R = +\Gamma_\phi\rho_\phi. \quad (2.11)$$

Ambas ecuaciones 2.10 y 2.11 corresponden a las ecuaciones acopladas de Boltzmann, donde la tasa de expansión de Hubble está definida por

$$H^2 = \frac{\rho_T}{3M_P^2} = \frac{\rho_\phi + \rho_R}{3M_P^2}, \quad (2.12)$$

con M_P siendo la masa reducida de Planck.

Como se mencionó en la sección 2.1 el proceso de decaimiento del inflatón ϕ en energía de radiación, generará un recalentamiento en esta última. Asumiendo que ρ_ϕ atravesó por un periodo de dominación sobre ρ_R durante su decaimiento en el Universo temprano, es de nuestro interés estudiar los mecanismos en los que suceda. Comenzamos por la generalización de las ecuaciones de Boltzmann a

$$\frac{d\rho}{dt} + 3(1 + \omega)H\rho = G(\rho, a), \quad (2.13)$$

donde al usar $H = \dot{a}/a$ y

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{da} \frac{da}{dt} = \frac{d\rho}{da} \dot{a} \quad (2.14)$$

para reemplazarlos en 2.13, se halla la dependencia respecto al factor de escala a , obteniendo,

$$\frac{d\rho}{da}\dot{a} + 3(1 + \omega)\frac{\dot{a}}{a}\rho = G(\rho, a). \quad (2.15)$$

Al factorizar por \dot{a} , se expresa como

$$\dot{a} \left(\frac{d\rho}{da} + \frac{3(1 + \omega)\rho}{a} \right) = G(\rho, a), \quad (2.16)$$

y usando la diferenciación:

$$\frac{d}{da}(\rho a^n) = a^n \left(\frac{d\rho}{da} + \frac{n}{a}\rho \right), \quad (2.17)$$

con $n = 3(\omega + 1)$, podemos reescribir 2.16 como:

$$\frac{\dot{a}}{a^{3(\omega+1)}} \frac{d}{da}(\rho a^{3(\omega+1)}) = G(\rho, a) \quad (2.18)$$

, o

$$\frac{H}{a^{3(\omega+1)-1}} \frac{d}{da}(\rho a^{3(\omega+1)}) = G(\rho, a). \quad (2.19)$$

De esta forma, las ecuaciones de Boltzmann 2.10 y 2.11 de ρ_ϕ y ρ_R en términos de a serán expresadas como

$$\frac{H}{a^3} \frac{d}{da} (a^4 \rho_R) = \Gamma_\phi \rho_\phi, \quad (2.20)$$

$$\frac{H}{a^{3(1+\omega_\phi)-1}} \frac{d}{da} (a^{3(1+\omega_\phi)} \rho_\phi) = -\Gamma_\phi \rho_\phi, \quad (2.21)$$

Suponiendo que

Según la descripción de las energías esperada, podemos definir el factor de escala a_{crit} en el que comienza el periodo de dominación de ρ_ϕ , y el factor de escala a_{end} donde termina. Asumiendo que la densidad de energía ρ_ϕ se hace pequeña para un factor de escala que se encuentre lejos de su periodo de dominación, podemos definir que $\rho_\phi \ll \rho_R$, se presenta ante los casos:

$a \gg a_{\text{crit}}$, que implica

$$\frac{H}{a^3} \frac{d}{da} (a^4 \rho_R) = 0 \longrightarrow a^4 \rho_R = cte. \quad (2.22)$$

Y para $a \ll a_{\text{end}}$, que de la misma forma, se obtiene:

$$\frac{H}{a^3} \frac{d}{da} (a^4 \rho_R) = 0 \longrightarrow a^4 \rho_R = cte, \quad (2.23)$$

Podemos entonces comparar los valores de la densidad $a^4 \rho_R$ a través de un factor F que nos describe el aumento entre antes y después del decaimiento de ρ_ϕ como

$$F \equiv \frac{a^4 \rho_R(a)|_{a \gg a_{\text{end}}}}{a^4 \rho_R(a)|_{a \ll a_{\text{crit}}}} \quad (2.24)$$

Bajo la suposición de que el plasma del ME mantiene el equilibrio interno, la dependencia temporal de ρ_R con la temperatura puede ser obtenida de [7] como

$$\rho_R = \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4. \quad (2.25)$$

Aquí $g_*(T)$ corresponde al número efectivo de grados de libertad de la densidad de energía del ME, los cuales se evalúan según la temperatura a la que se encuentre, donde para un rango de temperaturas de $[10^{-5} - 10]$ GeV el número de grados de libertad puede ir desde $[4 - 110]$, como se define en [8]. Para que exista una nucleosíntesis del Big Bang exitosa, la temperatura al final de la fase de dominación de ρ_ϕ debe satisfacer que $T_{\text{end}} > 4$ MeV [9, 10, 11, 6], por lo que densidad de energía de radiación ρ_R tendrá una restricción en su valor al alcanzar $\rho_R(a_{\text{end}})$.

En la fase de dominación de ρ_ϕ , la evolución de ρ_R está gobernada por 2.20, con la tasa de Hubble escalando como $H \sim \sqrt{\rho_\phi}$ y $\rho_\phi \sim a^{-3(\omega+1)}$. Este comportamiento de ρ_ϕ es extendido o extrapolado hasta el punto en que deja de dominar (ρ_ϕ).

Considerando un decaimiento instantáneo de ρ_ϕ cuando deja de dominar, con $\Gamma_\phi = 0$, la evolución de ρ_ϕ en la ecuación 2.21 estará dada por

$$\rho_\phi a^{3(1+\omega)} = \text{constante} \longrightarrow \rho_\phi(a) = \frac{cte}{a^{3(1+\omega)}}. \quad (2.26)$$

Podemos determinar la cte usando el hecho de que en $\rho_\phi(a_{\text{end}}) = \rho_R(a_{\text{end}})$, lo que nos lleva a

$$cte = \rho_R(a_{\text{end}}) a_{\text{end}}^{3(1+\omega)} \longrightarrow \rho_\phi(a) = \rho_R(a_{\text{end}}) \left(\frac{a_{\text{end}}}{a} \right)^{3(1+\omega)} \quad (2.27)$$

Podemos usar una normalización respecto al valor que alcanzará la densidad de energía $\rho_{R_{\text{end}}}$ en a_{end} y simplificar el análisis de cada evolución. Para esto usaremos los siguientes reemplazos:

$$x = \frac{a}{a_{\text{end}}} \quad (2.28)$$

$$\rho_R(x) = \tilde{\rho}_R(x)\rho_{R_{\text{end}}} \quad (2.29)$$

$$\rho_\phi(x) = \tilde{\rho}_\phi(x)\rho_{R_{\text{end}}} \quad (2.30)$$

$$H^2 = \tilde{H}^2 H_{\text{end}}^2 \quad (2.31)$$

$$\Gamma_\phi = \gamma_\phi H_{\text{end}} \quad (2.32)$$

Con $\tilde{H}^2 = \tilde{\rho}_\phi + \tilde{\rho}_R$ y $H_{\text{end}}^2 = \rho_{R_{\text{end}}}/(3M_P^2)$ representando la normalización de la tasa de expansión respecto a la masa reducida de Planck y a la densidad de radiación, tras finalizado el periodo de dominación de ρ_ϕ . Aplicando estos cambios a las ecuaciones 2.21 y 2.20, se pueden reescribir como

$$\frac{\tilde{H}}{x^3} \frac{d}{dx} (\tilde{\rho}_R x^4) = \gamma_\phi \tilde{\rho}_\phi, \quad (2.33)$$

$$\frac{\tilde{H}}{x^{(\alpha-1)}} \frac{d}{dx} (\tilde{\rho}_\phi x^\alpha) = -\gamma_\phi \tilde{\rho}_\phi, \quad (2.34)$$

con $\alpha = 3(1 + \omega)$. De esta forma, tenemos normalizadas las ecuaciones de Boltzmann, las cuales nos entregan las soluciones normalizadas y analíticas

$$\tilde{\rho}_\phi(x) = \frac{1}{x^{3(1+\omega)}}, \quad (2.35)$$

$$\tilde{\rho}_R(x) = \frac{1}{x^4}. \quad (2.36)$$

A través de F podemos hallar el valor en que la densidad de energía ρ_R se cruza con ρ_ϕ para cuando comienza a dominar este último. Sea entonces

$$F = \frac{a_{\text{end}}^4 \rho_{R_{\text{end}}}}{a_{\text{crit}}^4 \rho_{R_{\text{crit}}}} \implies \rho_{R_{\text{crit}}} = \frac{\rho_{R_{\text{end}}}}{F} \left(\frac{a_{\text{end}}}{a} \right)^4 \quad (2.37)$$

Igualando la densidad $\rho_{R_{\text{crit}}}$ junto a ρ_ϕ podemos encontrar la relación entre F y el factor de escala a en el punto crítico como

$$F = \left(\frac{a_{\text{crit}}}{a_{\text{end}}} \right)^{3(1+\omega)-4} = x_{\text{crit}}^{3(1+\omega)-4}, \quad (2.38)$$

donde según el punto en que comience la dominación de ρ_ϕ respecto al factor de escala en el que termine, aumentará o disminuirá el cambio de energía entre $a^4\rho_{R_{\text{crit}}}$ y $a^4\rho_{R_{\text{end}}}$. Esta descripción es representada en la figura 2.2, donde se usó $x_{\text{crit}} = 0,1$ y $\omega = -1$ en las ecuaciones 2.35 y 2.38 para ilustrar la comparación entre la evolución de la densidad de energía $\tilde{\rho}_\phi$ y $\tilde{\rho}_R$.

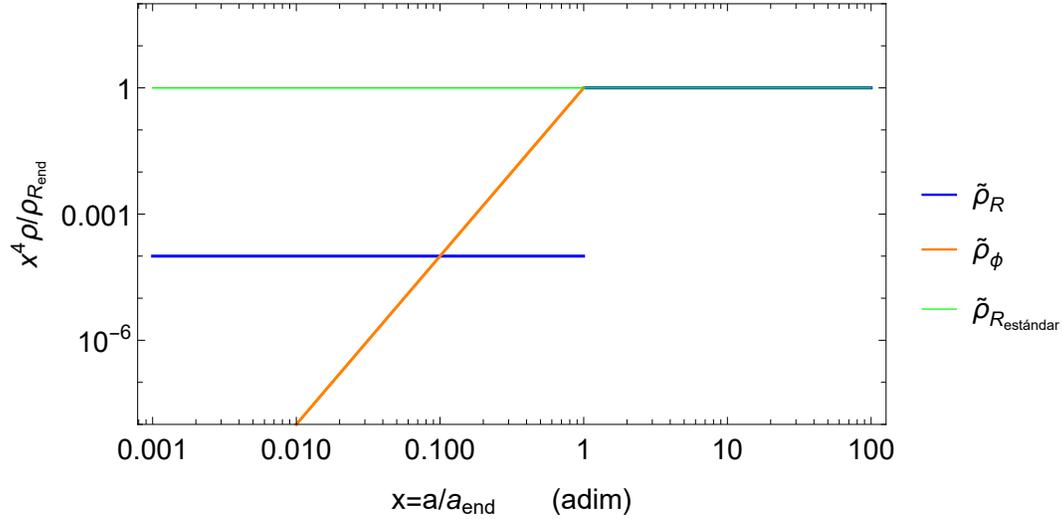


Figura 2.2: Gráfico $x^4\rho_\phi/\rho_{\text{end}}$ vs $x = a/a_{\text{end}}$, donde se representa la evolución de las densidades de energía a través de la solución analítica normalizada a $\rho_{R_{\text{end}}}$. La línea naranja muestra la evolución de ρ_ϕ para $\omega = -1$ y las líneas azules la evolución de ρ_R . En $x = a_{\text{end}}/a_{\text{end}} = 1$ la densidad de energía $x^4\rho_R$ queda constante en 1, indicando que llegó a la densidad requerida para una exitosa BBN y el fin de la dominación de ρ_ϕ . En la línea superior verde se ve la evolución de $\tilde{\rho}_R$ para el caso de una evolución estándar.

Solución Numérica

A través de la solución analítica podemos generar una proyección de valores ρ_ϕ para $x < x_{\text{crit}}$ y establecer una densidad de energía mínima $\rho_{\phi_{\text{min}}} < \rho_{\phi_{\text{crit}}}$ para un $x_{\text{min}} < x_{\text{crit}}$ y así hallar una solución numérica que atravesase por un periodo de decaimiento de ρ_ϕ . Estas se realizan a través del software Wolfram Mathematica con la herramienta `NDSolve` descrito en el Anexo 4, que mediante las Ecuaciones de Boltzmann normalizadas 2.33 y 2.34, y junto a valores mínimos

para $\tilde{\rho}_\phi$ y $\tilde{\rho}_R$ genera las soluciones numéricas de estas, las cuales son graficadas en comparación a nuestra solución analítica.

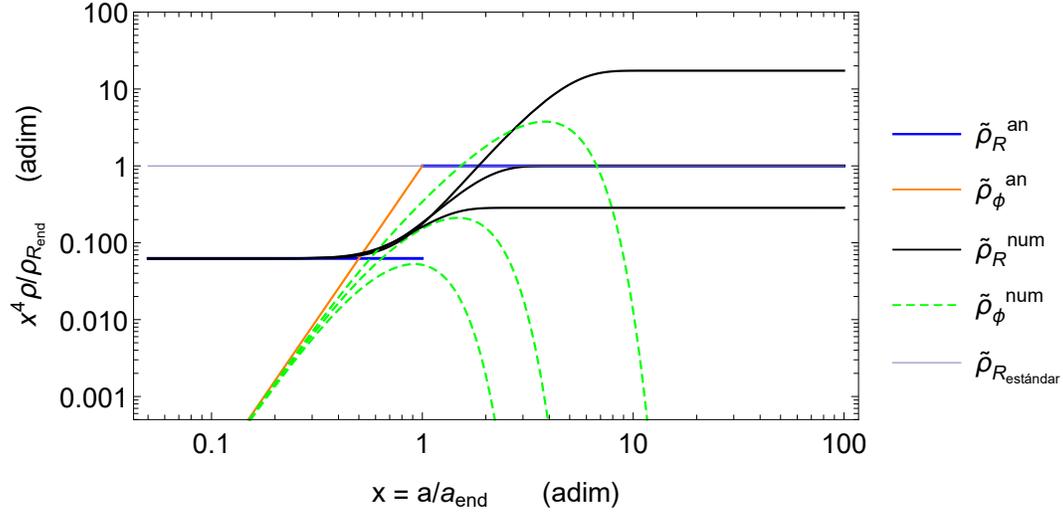


Figura 2.3: Gráfico $x^4 \rho / \rho_{\text{end}}$ vs $x = a/a_{\text{end}}$, donde se representa la evolución de las densidades de energía mediante una solución analítica y tres numéricas. Las líneas azules y naranja corresponden a la solución analítica de la figura 2.2. Mientras que las curvas discontinuas verde y continuas negras indican la evolución de $\tilde{\rho}_\phi$ y $\tilde{\rho}_R$, de nuestras soluciones numéricas respectivamente. Las evoluciones numéricas se realizaron a partir del mismo valor de $x_{\text{crit}}^{\text{num}} = 0,1$ y $\omega_\phi = -1$ pero con diferentes tasas de decaimiento, siendo $\gamma_\phi = 0,62173$ el valor necesario para que la densidad de energía del ME termine por coincidir con la evolución estándar. Para las curvas de energía superiores de $\tilde{\rho}_\phi$ y $\tilde{\rho}_R$, se usó una tasa de decaimiento $\gamma_\phi = 0,900$, mientras que para las inferiores $\gamma_\phi = 2,100$

En la figura 2.3 se graficaron 3 soluciones de la evolución numérica de $\tilde{\rho}_\phi$ y $\tilde{\rho}_R$, a través de las curvas verdes punteadas, y las curvas negras, respectivamente. Estas, al estar influenciadas por un decaimiento constante γ_ϕ sufrirán una transición continua hacia sus valores finales a diferencia de la solución analítica.

La evolución de $x^4 \tilde{\rho}_R$ cumple con quedar constante en 1 para un la solución numérica con la tasa de decaimiento $\gamma_\phi = 1,45386$, donde el valor del factor de escala x en que deja de dominar $\tilde{\rho}_\phi$ es mayor al caso analítico.

De esta forma, la evolución de densidades está dada por un valor único de γ_ϕ , el cual me puede entregar una evolución que cumpla con las condiciones

impuestas, o según como lo variemos, un valor mayor o menor a la densidad de energía $\rho_{R_{\text{end}}}$ requerida. De esta forma podemos determinar las distintas evoluciones de la energía, a través de la variación de ω_ϕ , $F(x_{\text{crit}}^{\text{an}})$ y γ_ϕ .

Capítulo 3

Análisis y Resultados

Como hemos visto, la solución numérica tendrá un comportamiento parecido, pero diferente, de las soluciones analíticas de las ecuaciones normalizadas de Boltzmann, donde los parámetros que harán variar a estas últimas serán: el parámetro de estado ω_ϕ , el incremento de energía que obtienen las partículas del modelo estándar F , y la tasa de decaimiento que sufrirán las partículas del inflatón γ_ϕ .

Debemos estudiar como debe comportarse γ_ϕ para que la evolución de ρ_ϕ y ρ_R cumplan las condiciones impuestas en nuestra solución analítica, donde ρ_ϕ debe atravesar por un periodo de dominación por sobre ρ_R y alimentar a esta última hasta que alcance el valor $\rho_{R_{\text{end}}}$ requerido para no interferir en una nucleosíntesis primordial exitosa. Debido a que el punto crítico $x_{\text{crit}}^{\text{an}}$ me establece el incremento de energía F del ME y el momento en que comienza la dominación de ρ_ϕ , se espera que el valor de la tasa de decaimiento γ_ϕ varíe en relación con el valor de x_{crit} .

El trabajo siguiente consistió en determinar para que valores de γ_ϕ se cumple el valor final de $x^4 \tilde{\rho}_R$ a medida que se varía $x_{\text{crit}}^{\text{an}}$, que es el punto en que comienza la dominación de ρ_ϕ .

Como se mencionó en la subsección 2.1.2, la función `NDSolve` entrega una solución numérica de las densidades de energía ρ_ϕ y ρ_R a partir de los parámetros que ingresemos de ω_ϕ , x_{crit} y γ_ϕ . Por otra parte, se crea una función `Module` la cual utiliza las soluciones de `NDSolve` para hallar además el factor de escala normalizado x en que cambia la densidad de energía dominante $x_{\text{crit}}^{\text{num}}$ y $x_{\text{end}}^{\text{num}}$,

así como también el valor al que queda normalizado $x^4\rho_R$, tras terminar el decaimiento de $\tilde{\rho}_\phi$. Es a través de la función `Module` descrita en el Anexo 4 que se genera una lista de valores de la densidad de energía normalizada $x^4\tilde{\rho}_R$ tras el decaimiento de $\tilde{\rho}_\phi$ según un rango de posibles valores de γ_ϕ . Luego, esta lista es interpolada en el Anexo 4 para hallar el valor exacto que debe tener el decaimiento γ_ϕ para obtener la densidad de energía requerida $x^4\tilde{\rho}_R = 1$ tras la desaparición de $\tilde{\rho}_\phi$.

3.1. Evolución de las densidades de energía variando los parámetros ω_ϕ , $x_{\text{crit}}^{\text{an}}$ y γ_ϕ

En la inflación mencionada en la subsección 2.1.1, se considera a la densidad de energía ρ_ϕ con un valor de su parámetro de estado $\omega_\phi = 0$, sin embargo, como se ha mencionado en 2.1.2, este no es el único comportamiento que puede tener la materia, por lo que se analizaron distintos valores del parámetro de estado ω_ϕ , que se mantuvieran por debajo del comportamiento relativista que tiene la radiación del ME ($\omega_\phi = 1/3$). En particular, se utilizó ω_ϕ con el valor -1, 0 y 1/5 para estudiar las diferencias que se podrían presentar en cada evolución.

Parámetro $\omega_\phi = -1$

Para este comportamiento de la materia, asociada a la energía oscura de presión negativa, se abarcó un rango de soluciones del $x_{\text{crit}}^{\text{an}}$ entre $[10^{-5} - 0,2]$, los cuales entregaron sus valores respectivos del decaimiento γ_ϕ desde $[0.15649 - 0.8156]$.

Graficando los casos extremos de estos rangos podemos observar en la figura 3.1, que para $\omega_\phi = -1$, $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 10^{-5}$ y $\gamma_\phi = 0,15649$, existe un claro periodo de dominación de ρ_ϕ para la solución numérica, donde la energía del ME aumenta un orden de 10^{20} y el factor de escala en el que termina el recalentamiento, y comienza a dominar ρ_R sucede más tarde que en la solución analítica $x_{\text{end}}^{\text{an}} = 1$, con un $x_{\text{end}}^{\text{num}} = 3,185$.

En la figura 3.2 se graficó la solución analítica y numérica para $\omega_\phi = -1$ con el otro extremo del punto crítico $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 0,2$, el cual, al igual que en la figura 3.1

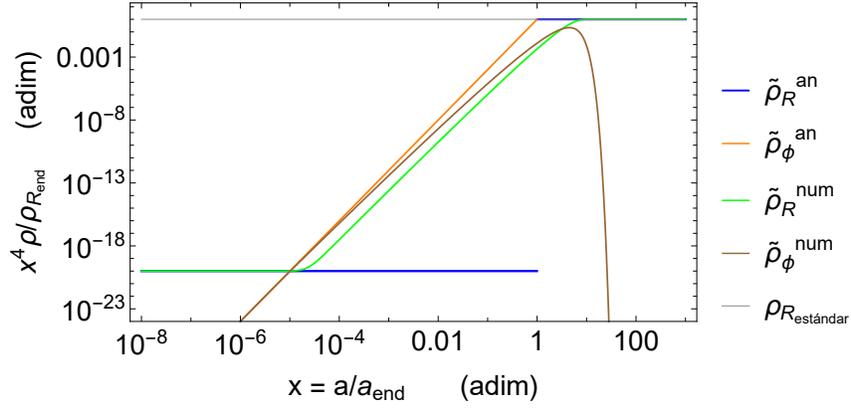


Figura 3.1: Gráfico de $x^4 \rho / \rho_{R_{\text{end}}}$ vs $x = a/a_{\text{end}}$ en que se muestra la evolución de las densidades de energía ρ_ϕ y ρ_R a través de sus soluciones numéricas y analíticas, para un $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 10^{-5}$, $\omega_\phi = -1$ y $\gamma_\phi = 0,15649$.

representa un periodo de dominación claro de ρ_ϕ , el cual cumple con decaer en partículas del ME hasta que esta última alcance el valor de la solución analítica con un aumento de su energía del orden 10^3 . El punto de recalentamiento, donde termina la dominación de ρ_ϕ , es de $x_{\text{end}}^{\text{num}} = 1,39239$, este sobrepasa el valor de $x_{\text{end}}^{\text{an}}$, pero a menor diferencia que en la figura 3.1.

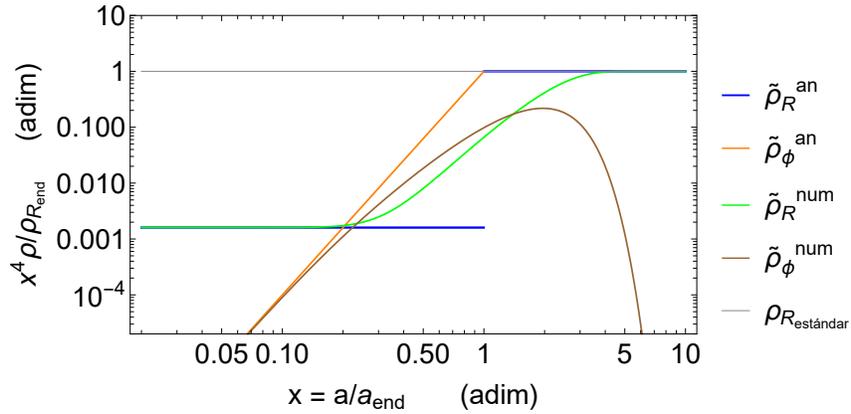


Figura 3.2: Gráfico de $x^4 \rho / \rho_{R_{\text{end}}}$ vs $x = a/a_{\text{end}}$ en que se muestra la evolución de las densidades de energía ρ_ϕ y ρ_R a través de sus soluciones numéricas y analíticas, para un $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 0,2$, $\omega_\phi = -1$ y $\gamma_\phi = 0,8156$.

Parámetro $\omega_\phi = 0$

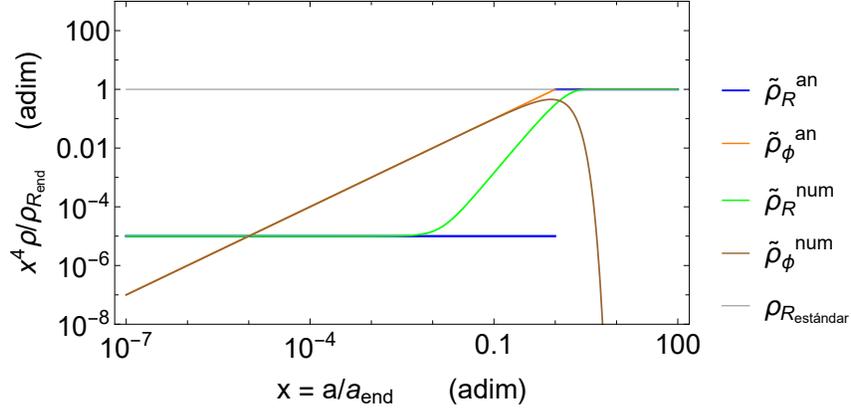


Figura 3.3: Gráfico de $x^4 \rho / \rho_{R_{\text{end}}}$ vs $x = a/a_{\text{end}}$ en que se muestra la evolución de las densidades de energía ρ_ϕ y ρ_R a través de sus soluciones numéricas y analíticas, para un $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 10^{-5}$, $\omega_\phi = 0$ y $\gamma_\phi = 1,1337$

Si el fluido ρ_ϕ se comporta como polvo (materia no relativista), tendrá un $\omega_\phi = 0$ tal y como se expresa en la ecuación 2.7. En este caso, se abarcó un rango para el $x_{\text{crit}}^{\text{an}}$ de $[10^{-5} - 0,5]$, los cuales entregaron valores del decaimiento γ_ϕ en un rango de $[1.1337 - 5.6529]$ para que la densidad de energía ρ_ϕ incremente lo requerido.

Graficando ambos límites en nuestro rango de valores $x_{\text{crit}}^{\text{an}}$ con $\omega_\phi = 0$, se tiene que para el caso $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 10^{-5}$ en la figura 3.3, hay una dominación de $\tilde{\rho}_\phi^{\text{num}}$ que evoluciona de manera conjunta a su caso analítico, perdiendo su relevancia prácticamente en el factor de escala $x_{\text{end}}^{\text{an}}$ y cumpliendo un decaimiento apropiado en partículas del ME.

Para $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 0,2$ en la figura 3.4, se observa que $\tilde{\rho}_\phi^{\text{num}}$ posee un periodo de dominación, sin embargo, no sigue un comportamiento similar al de su solución analítica, perdiendo su periodo de dominación antes que $x_{\text{end}}^{\text{an}}$, pero logrando el aumento necesario de energía para $\tilde{\rho}_{R_{\text{end}}}^{\text{num}}$.

Luego, en la figura 3.5, en el otro límite calculado de $\omega_\phi = 0$, con $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 0,5$, se llega a un caso en que la solución analítica no es totalmente compatible con su solución numérica, donde la evolución de energías no atraviesa por ningún periodo de dominación de $\tilde{\rho}_\phi$, pero que, sin embargo, cumple con el decaimiento

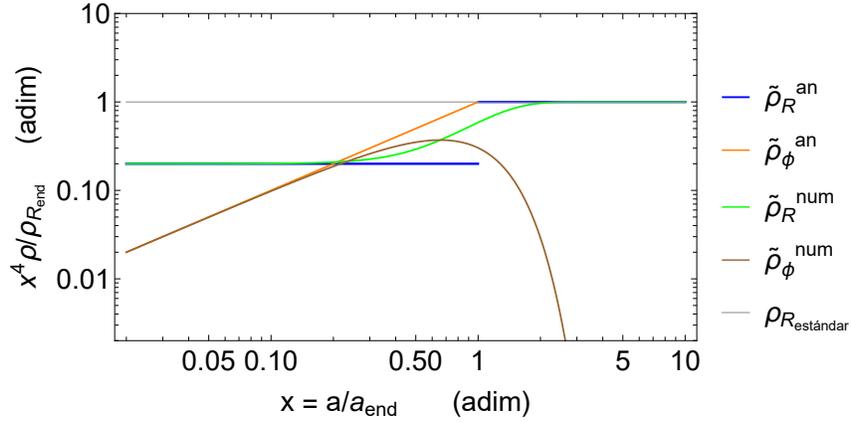


Figura 3.4: Gráfico de $x^4 \rho / \rho_{R_{\text{end}}}$ vs $x = a/a_{\text{end}}$ en que se muestra la evolución de las densidades de energía ρ_ϕ y ρ_R a través de sus soluciones numéricas y analíticas, para un $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 0,2$, $\omega = 0$ y $\gamma_\phi = 1,99335$

suficiente para que la densidad de energía del ME llegue a $\tilde{\rho}_{R_{\text{end}}}^{\text{num}} = 1$. Podemos inferir, entonces, que mientras menor sea el aumento de energía atravesado por $\tilde{\rho}_R$ (mediante un aumento de $x_{\text{crit}}^{\text{an}}$ que aplaza el periodo de dominación de ρ_ϕ), mayor debe ser la tasa de decaimiento γ_ϕ para que la evolución de la radiación del ME cumpla con $x^4 \rho_\phi = 1$. Esto provoca que el periodo de dominación de $\tilde{\rho}_\phi^{\text{num}}$ se haga cada vez más corto, hasta valores en los que no se logra generar una dominación por parte de $\tilde{\rho}_\phi$ en la solución numérica. De esta forma, con los parámetros mencionados, se obtuvieron inconsistencias en la solución normalizada, con $x_{\text{crit}}^{\text{nor}} = 1000,6$ y $x_{\text{end}}^{\text{nor}} = 1000,8$. Luego, para valores del $x_{\text{crit}}^{\text{an}}$ mayores al anterior, la solución analítica se vuelve inconsistente, ya que no hay una tasa de decaimiento suficiente para que la evolución de $x^4 \rho_R$ llegue a 1.

Parámetro $\omega_\phi = 1/5$

Estudiar el caso de en que se comporte como materia relativista ($\omega_\phi = 1/3$) no es de interés, puesto que tendría la misma evolución que la radiación del ME, por lo que se optó por materia que no se comportara como esta última, pero sí con una presión mayor que nuestro caso anterior ($\omega_\phi = 0$). Para un $\omega_\phi = 1/5$ se estudió un rango para el $x_{\text{crit}}^{\text{an}}$ de $[10^{-5} - 0,1]$, los cuales entregaron valores γ_ϕ

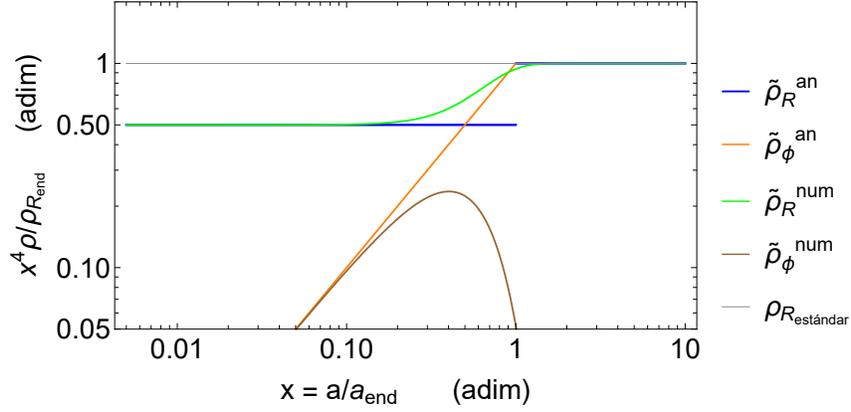


Figura 3.5: Gráfico de $x^4 \rho / \rho_{R_{\text{end}}}$ vs $x = a/a_{\text{end}}$ en que se muestra la evolución de las densidades de energía ρ_ϕ y ρ_R a través de sus soluciones numéricas y analíticas, para un $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 0,5$, $\omega_\phi = 0$ y $\gamma_\phi = 5,65291$

desde [1.2036 - 10006].

En la figura 3.6, se graficó la evolución de las energías para $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 10^{-5}$, con su tasa de decaimiento correspondiente $\gamma_\phi = 1,20361$, el cual, tiene una evolución de ρ_ϕ^{num} prácticamente idéntica que la de su evolución analítica, con un fin de su dominación en $x_{\text{end}}^{\text{num}} = 1$. El incremento de energía que sufre la radiación del ME es de 10^4 .

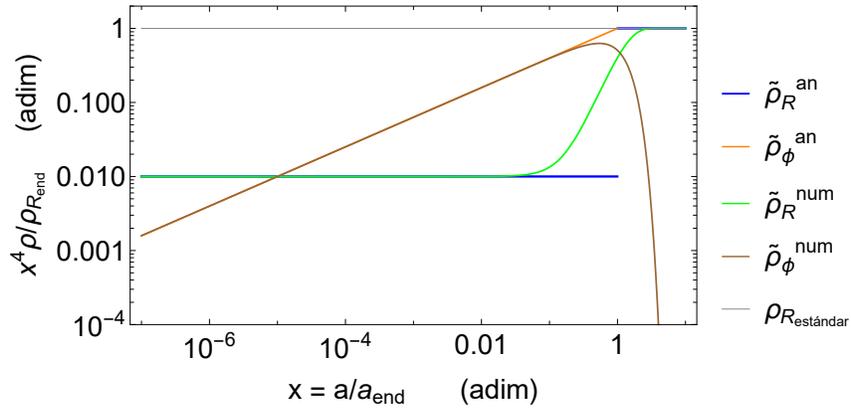


Figura 3.6: Gráfico de $x^4 \rho / \rho_{R_{\text{end}}}$ vs $x = a/a_{\text{end}}$ en que se muestra la evolución de las densidades de energía ρ_ϕ y ρ_R a través de sus soluciones numéricas y analíticas, para un $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 10^{-5}$, $\omega_\phi = 1/5$ y $\gamma_\phi = 1,20361$

Luego, en la figura 3.7, se estudia el caso de $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 0,1$, en el que nuevamente no concuerda del todo la solución analítica con la normalizada, debido a que no existe ningún periodo por el cual ρ_ϕ^{num} domine sobre las energías presentes. Es posible llegar al valor necesario de radiación del ME a través de una fuerte tasa de decaimiento $\gamma_\phi = 15,5296$.

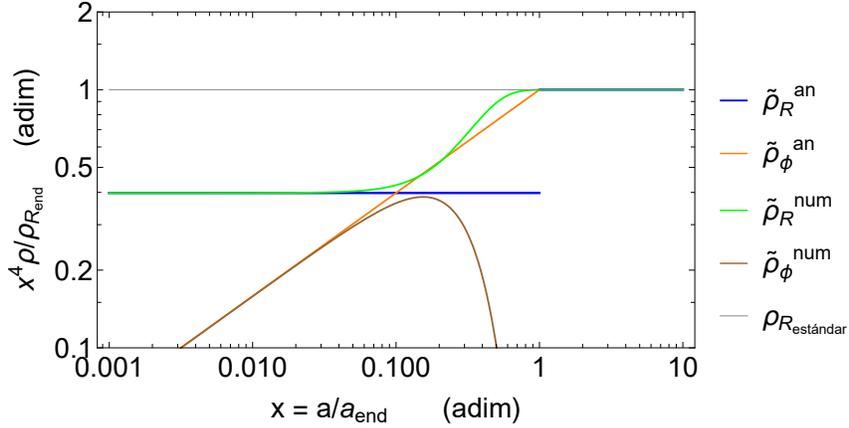


Figura 3.7: Gráfico de $x^4 \rho / \rho_{R_{\text{end}}}$ vs $x = a/a_{\text{end}}$ en que se muestra la evolución de las densidades de energía ρ_ϕ y ρ_R a través de sus soluciones numéricas y analíticas, para un $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 0,1$, $\omega_\phi = 1/5$ y $\gamma_\phi = 15,5296$.

Como hemos visto, la evolución de ambas densidades de energía variará en gran medida según el ω_ϕ , $x_{\text{crit}}^{\text{an}}$ y γ_ϕ , encontrando casos donde básicamente ρ_ϕ domina sobre toda la evolución de ρ_R ; periodos en el que su dominio no prevalece durante tanto tiempo, y casos en que ni siquiera se atraviesa por un periodo de dominación de ρ_ϕ .

3.2. Evolución de la tasa de expansión H

En el caso de que el Universo no hubiese atravesado por este periodo inflacionario, la tasa de expansión H vista en la subsección 2.1.2, no dependerá de ρ_ϕ , y su comportamiento estará enteramente dominado por ρ_R y su evolución a través del factor de escala. En un caso como este, la tasa de expansión normalizada para la aproximación analítica normalizada $\tilde{\rho}_R = 1/x^4$, estará definida como

$$\tilde{H} = \sqrt{\tilde{\rho}_R(x)} = \sqrt{\frac{1}{x^4}} = \frac{1}{x^2} \quad (3.1)$$

Esta solución nos muestra como el valor de H cae a medida que el factor de escala crece para una evolución en la que no existe una densidad de energía adicional que influye sobre la expansión del Universo. De manera análoga a la comparación entre densidades de energía hecha en la subsección anterior, podemos estudiar la evolución de la tasa de expansión estándar de H junto a la que sufre la presencia de otra densidad de energía en el Universo Temprano.

Según lo visto en la subsección 2.1.2 la tasa de expansión de Hubble depende de las densidades de energías presentes en el Universo mediante

$$\tilde{H}^2 = H^2/H_{\text{end}}^2 = \tilde{\rho}_\phi + \tilde{\rho}_R \quad (3.2)$$

Esto nos indica que los distintos casos de dominación de energía, tanto de ρ_ϕ , como de ρ_R afectarán directamente a la expansión del Universo Temprano, por lo que podemos analizar los distintos casos de evolución que tendrá la tasa de expansión H .

Se realizaron gráficos de comparación entre la evolución estándar de \tilde{H} y los distintos casos de ω_ϕ analizados en la subsección 3.1, donde los valores de \tilde{H} están multiplicados por un factor x^2 , y así dejar constante la evolución estándar de la tasa de expansión normalizada respecto a las densidades de energía y la Masa reducida de Planck M_P en 1. Estudiando respectivamente los distintos x_{crit} para cada caso de ω_ϕ visto.

Para la figura 3.8 se observa que la tasa $x^2\tilde{H}$ numérica normalizada, representada por la curva azul, se ve incrementada debido a la transición de energía que sufre ρ_R , al igual que en su solución analítica, representada por la curva naranja. En este caso $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 10^{-5}$ y $\gamma_\phi = 0,15649$, y el incremento de $x^2\tilde{H}$ es de 10^{10} . En la parte superior, la recta de color verde representa la tasa de expansión de $x^2\tilde{H}$ para una evolución estándar, la cual debido solo a la presencia de ρ_R es que queda constante.

En la figura 3.9 se ve que para la tasa $x^2\tilde{H}$ numérica normalizada, representada por la curva azul, se ve incrementada debido a la transición de energía que sufre ρ_R , al igual que en su solución analítica, representada por la curva naranja.

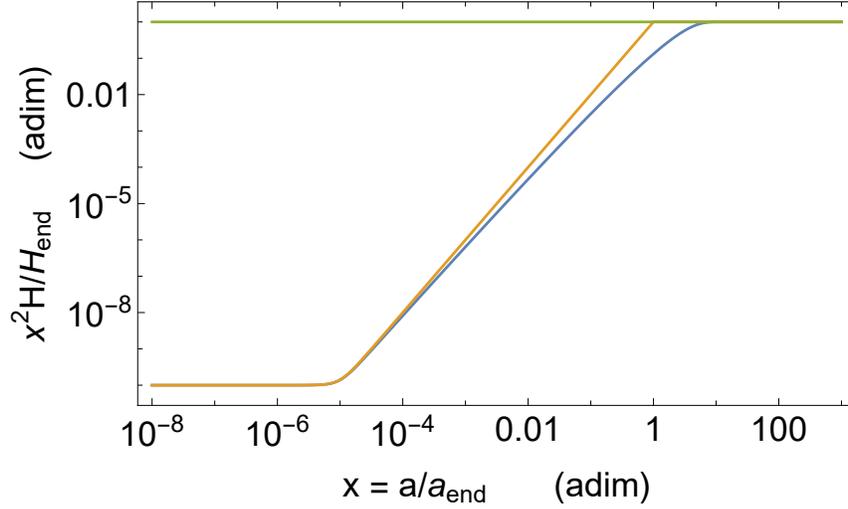


Figura 3.8: Gráfico de $x^2 H / H_{\text{end}}$ vs $x = a / a_{\text{end}}$, en el que se muestra la evolución de la tasa de expansión H normalizada con $\omega_\phi = -1$, $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 10^{-5}$ y $\gamma_\phi = 0,15649$ mediante las soluciones analíticas y numéricas de ρ_R y ρ_ϕ . Línea superior constante corresponde a la tasa de expansión para una evolución estándar.

En este caso $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 0,2$ y $\gamma_\phi = 0,8156$, y el incremento de $x^2 \tilde{H}$ es de 10^2 . En la parte superior, la recta de color verde representa la tasa de expansión de $x^2 \tilde{H}$ para una evolución estándar, la cual debido solo a la presencia de ρ_R es que queda constante.

Luego, en la figura 3.10 se observa que la tasa $x^2 \tilde{H}$ numérica normalizada, representada por la curva azul, se ve incrementada debido a la transición de energía que sufre ρ_R , al igual que en su solución analítica, representada por la curva naranja. En este caso $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 10^{-5}$ y $\gamma_\phi = 1,1337$, y el incremento de $x^2 \tilde{H}$ es de 10^3 . En la parte superior, la recta de color verde representa la tasa de expansión de $x^2 \tilde{H}$ para una evolución estándar, la cual debido solo a la presencia de ρ_R es que queda constante.

Para la figura 3.11 se encuentra que la tasa $x^2 \tilde{H}$ numérica normalizada, representada por la curva azul, se ve incrementada debido a la transición de energía que sufre ρ_R , al igual que en su solución analítica, representada por la curva naranja. En este caso $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 0,2$ y $\gamma_\phi = 1,99335$, y el incremento de $x^2 \tilde{H}$ es de 10^2 . Sin embargo, aquí se puede apreciar una discontinuidad por parte de la solución analítica, la cual lleva el valor de la tasa a 1,1, por sobre el valor tanto de

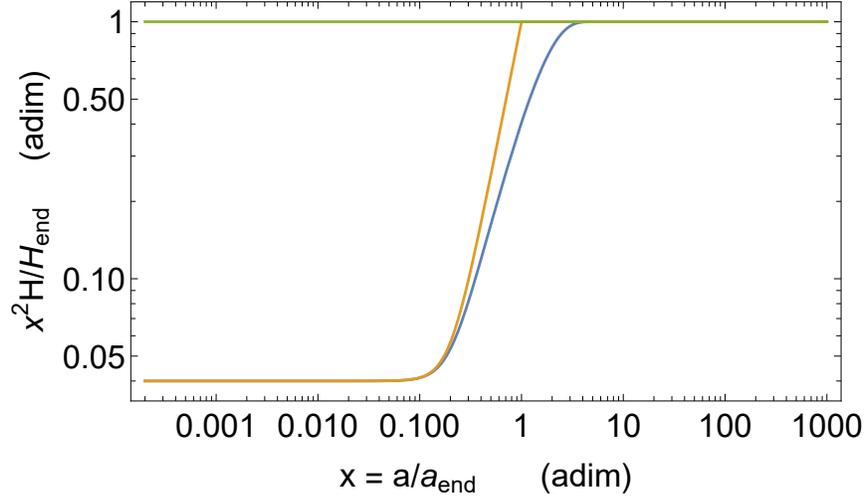


Figura 3.9: Gráfico de $x^2 H / H_{\text{end}}$ vs $x = a / a_{\text{end}}$, en el que se muestra la evolución de la tasa de expansión H normalizada con $\omega_\phi = -1$, $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 0,2$ y $\gamma_\phi = 0,8156$ junto a su evolución analítica. Línea superior constante corresponde a la tasa de expansión para una evolución estándar.

la evolución estándar, como de la solución no estándar numérica normalizada. La tasa de expansión \tilde{H} de las soluciones analíticas, es la suma de ambas densidades de energía, donde la densidad de energía de ρ_ϕ no sufre un decaimiento constante, llegando a valores muy cercanos a 1 antes de su decaimiento instantáneo, y a la tasa de expansión al valor esperado. Sin embargo, debido a que la densidad de energía de radiación ρ_R , antes de su transición, posee una fracción de su valor final $\rho_{R_{\text{end}}}$, la tasa de expansión incrementará por sobre 1 según la diferencia de energía que se encuentra entre ρ_R , antes y después del decaimiento de ρ_ϕ . En este caso, el valor de nuestra densidad de radiación del modelo estándar ρ_R posee fracciones comparables de energía antes y después de su transición, generando este ‘exceso’ en la tasa de expansión. En la parte superior, la recta de color verde representa la tasa de expansión de $x^2 \tilde{H}$ para una evolución estándar normalizada.

En la figura 3.12 podemos notar que la tasa $x^2 \tilde{H}$ numérica normalizada, representada por la curva azul, se ve incrementada debido a la transición de energía que sufre ρ_R , al igual que en su solución analítica, representada por la curva naranja. En este caso $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 0,5$ y $\gamma_\phi = 5,65291$, y el incremento de $x^2 \tilde{H}$ es

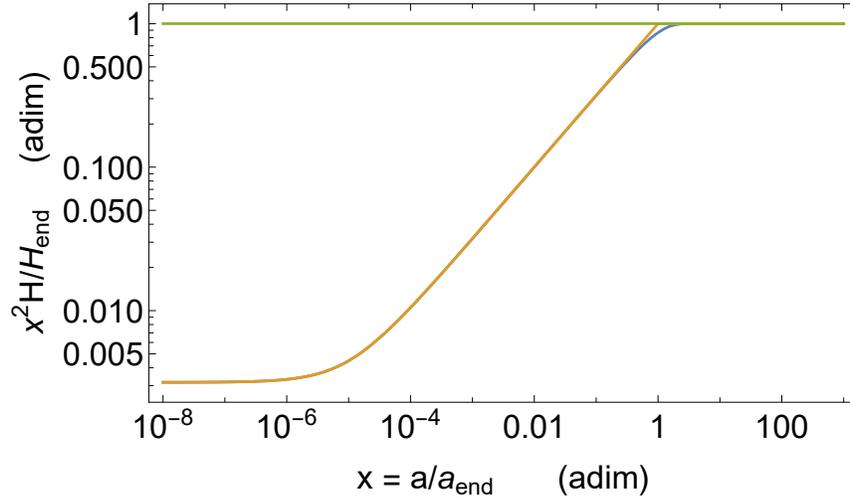


Figura 3.10: Gráfico de $x^2 H/H_{\text{end}}$ vs $x = a/a_{\text{end}}$, en el que se muestra la evolución de la tasa de expansión H normalizada con $\omega_\phi = 0$, $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 10^{-5}$ y $\gamma_\phi = 1,1337$ junto a su evolución analítica. Línea superior constante corresponde a la tasa de expansión para una evolución estándar.

menor a 1 . Esto nos dice que la solución analítica de ρ_R no representa una buena aproximación de la evolución de la tasa de expansión en esta situación. En esta figura, al igual que la anterior, la tasa de expansión sobrepasa el valor máximo esperado tanto por la solución estándar, como la no-estándar normalizada. En la parte superior, la recta de color verde representa la tasa de expansión de $x^2 \tilde{H}$ para una evolución estándar, la cual debido solo a la presencia de ρ_R es que queda constante.

Analizando la figura 3.13 se observa que la tasa $x^2 \tilde{H}$ numérica normalizada, representada por la curva azul, se ve incrementada debido a la transición de energía que sufre ρ_R , al igual que en su solución analítica, representada por la curva naranja. En este caso $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 10^{-5}$ y $\gamma_\phi = 1,20361$, y el incremento de $x^2 \tilde{H}$ es de un orden de 10. En la parte superior, la recta de color verde representa la tasa de expansión de $x^2 \tilde{H}$ para una evolución estándar, la cual debido solo a la presencia de ρ_R es que queda constante.

Por último, para la figura 3.14 se observa que la tasa $x^2 \tilde{H}$ numérica normalizada, representada por la curva azul, se ve incrementada debido a la transición de energía que sufre ρ_R , al igual que en su solución analítica, representada por

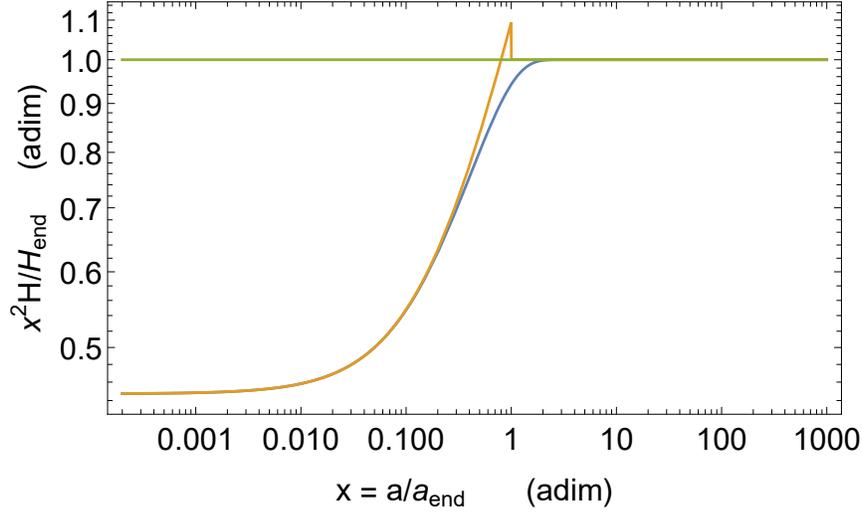


Figura 3.11: Gráfico de $x^2 H/H_{\text{end}}$ vs $x = a/a_{\text{end}}$, en el que se muestra la evolución de la tasa de expansión H normalizada con $\omega_\phi = 0$, $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 0,2$ y $\gamma_\phi = 1,99335$ junto a su evolución analítica. Línea superior constante corresponde a la tasa de expansión para una evolución estándar.

la curva naranja. En este caso $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 0,1$ y $\gamma_\phi = 15,5296$, y el incremento de $x^2 \tilde{H}$ es de 0.6 unidades. Se observa, además, que la solución analítica entrega valores para la tasa de expansión que sobrepasan los esperados por la solución numérica y la evolución estándar. En la parte superior, la recta de color verde representa la tasa de expansión de $x^2 \tilde{H}$ para una evolución estándar, la cual debido solo a la presencia de $\tilde{\rho}_R$ es que queda constante.

3.2.1. Dependencia de $x_{\text{end}}^{\text{num}}$ para γ_ϕ

Otro análisis que se realizó, fue sobre como al variar las tasas de decaimiento que se presentan en las distintas figuras de la subsección 3.1 y cumplir con las densidades esperadas, se encuentra un valor único para cada punto $x_{\text{end}}^{\text{nor}}$ donde se cruzan las energías para una nueva dominación del ME. Este punto diferirá de la solución analítica, obteniéndose valores por debajo y por sobre $x_{\text{end}}^{\text{an}}$. Esto no implica que se modifique el valor final de la tasa de expansión o de las densidades de energía, sino que nos establece el fin del periodo de dominación de $\tilde{\rho}_\phi$ en distintos momentos. En la figura 3.15 se grafica el comportamiento que sigue

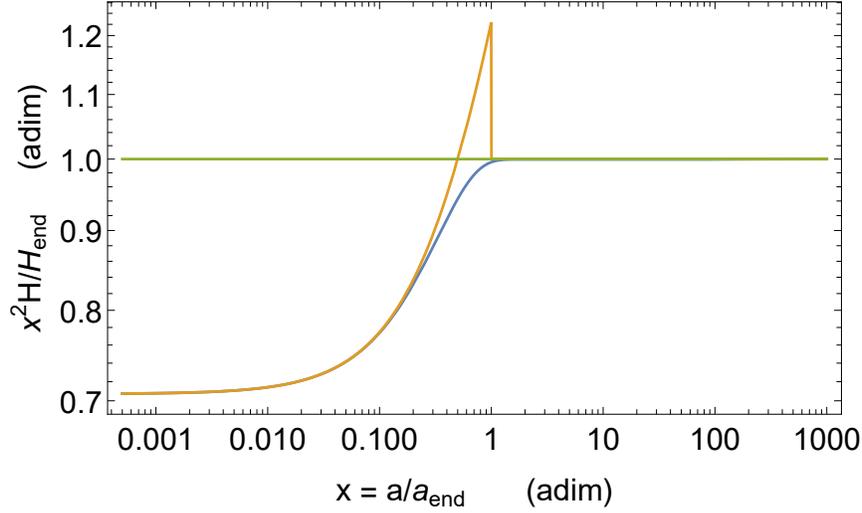


Figura 3.12: Gráfico de $x^2 H/H_{\text{end}}$ vs $x = a/a_{\text{end}}$, en el que se muestra la evolución de la tasa de expansión H normalizada con $\omega_\phi = 0$, $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 0,5$ y $\gamma_\phi = 5,65291$ junto a su evolución analítica. Línea superior constante corresponde a la tasa de expansión para una evolución estándar.

$x_{\text{end}}^{\text{num}}$ a través del crecimiento que tiene la tasa de decaimiento γ_ϕ , donde, como se vio anteriormente, el incremento que tenga surge de la cada vez más estrecha diferencia entre la densidad de energía $\tilde{\rho}_R$ antes y después de su transición.

Se graficó este comportamiento de $x_{\text{end}}^{\text{num}}$ para el caso de los 3 parámetros de estado estudiados, en el que se observa una conducta similar, pero más pronunciada a menor sea el valor de ω_ϕ . En el caso $\omega_\phi = -1$, el $x_{\text{end}}^{\text{num}}$ llega a valores aproximados a las 3 unidades, donde las variaciones que sufre para valores de $\gamma_\phi < 0,1$ se vuelven insignificantes. Lo mismo sucede con $\omega_\phi = 0$, a medida que decrece γ_ϕ , el término de la dominación de $\tilde{\rho}_\phi$ se extiende hasta $x_{\text{end}}^{\text{num}} = 2$, donde no pasará por ningún cambio significativo y quedando como límite superior.

Por último, para $\omega_\phi = 1/5$, el valor del decaimiento se hace asintótico por sobre $\gamma_\phi = 5$, y genera su mayor punto de cruce alrededor de $x_{\text{end}}^{\text{num}} = 1,5$. Podemos ver que para cada caso, x_{end} crece a medida que la tasa de decaimiento baja, indicando así que un decaimiento más débil genera un periodo de dominación más grande para $\tilde{\rho}_\phi$.

Cada curva fue realizada a través de una lista asociada a cada ω_ϕ con

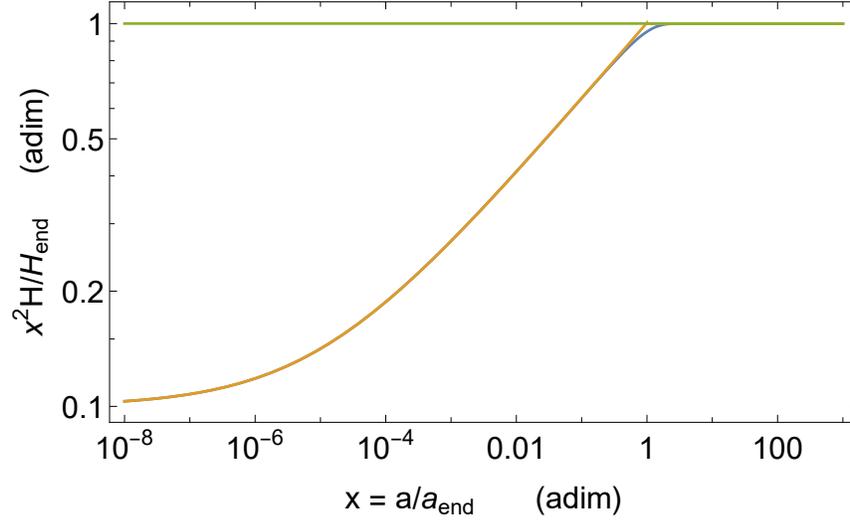


Figura 3.13: Gráfico de $x^2 H/H_{\text{end}}$ vs $x = a/a_{\text{end}}$, en el que se muestra la evolución de la tasa de expansión H normalizada con $\omega_\phi = 0,20$, $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 10^{-5}$ y $\gamma_\phi = 1,20361$ junto a su evolución analítica. Línea superior constante corresponde a la tasa de expansión para una evolución estándar.

los decaimientos γ_ϕ obtenidos mediante nuestra función `Module`, y otra lista con sus respectivos $x_{\text{end}}^{\text{num}}$. Luego, estas listas se interpolaron y graficaron para obtener la figura 3.15. Notar que en estos gráficos se consideraron solo aquellas soluciones que entregaban valores coherentes de $x_{\text{crit}}^{\text{num}}$ y $x_{\text{end}}^{\text{num}}$, y no aquellas que si bien obtenían la densidad de energía necesaria, no pasaban por un periodo de dominación de $\tilde{\rho}_\phi$.

3.2.2. Implicancias en la Abundancia de Materia Oscura

La producción de materia oscura en el universo temprano durante una fase de expansión no estándar está dada por la fuerza de interacción de aniquilamiento $\langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle$, el cual determina si las partículas de MO estuvieron en equilibrio térmico con la radiación del ME en el Universo Temprano y por ende si su producción se generó mediante freeze-out o freeze-in.

La evolución del número de densidad de materia oscura n_S es descrito por la ecuación de Boltzmann [7]

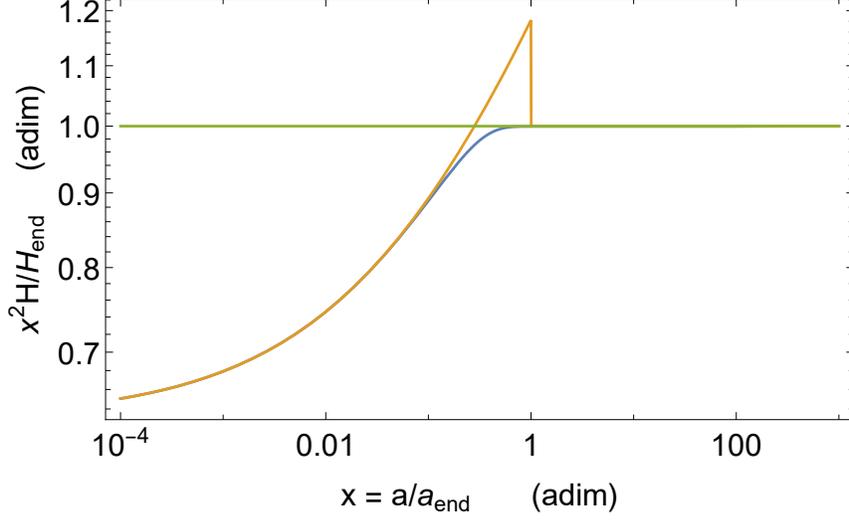


Figura 3.14: Gráfico de $x^2 H/H_{\text{end}}$ vs $x = a/a_{\text{end}}$, en el que se muestra la evolución de la tasa de expansión H normalizada con $\omega_\phi = 0,20$, $x_{\text{crit}}^{\text{an}} = 0,1$ y $\gamma_\phi = 15,5296$ junto a su evolución analítica. Línea superior constante corresponde a la tasa de expansión para una evolución estándar.

$$\frac{dn_S}{dt} + 3Hn_S = -\langle\sigma_{\text{ann}}v\rangle[n_S^2 - (n_S^{\text{eq}})^2], \quad (3.3)$$

la cual puede ser resuelta numéricamente como en [7]. En ella, $\langle\sigma_{\text{ann}}v\rangle$, representa la tasa de aniquilación de MO en partículas del baño térmico. Además, n_S representa la densidad de número de partículas de materia oscura, y n_S^{eq} , la densidad de número de partículas en equilibrio térmico. Al igual que en nuestras ecuaciones acopladas de Boltzmann para las densidades de energía ρ_ϕ y ρ_R , la ecuación 3.3, también se verá afectada por el parámetro de Hubble, el cual como hemos visto depende de las densidades de energías presentes. En el caso estándar, hemos visto que el parámetro de Hubble no se ve afectado por densidades de energías externas a la radiación del ME, decayendo como $1/x^2$, por lo que la densidad de materia oscura evoluciona normalmente hasta alcanzar una cantidad que se desacopla del equilibrio térmico y que luego se convertirá en la abundancia de MO observada hoy en día.^b

Para el caso no-estándar, el parámetro H sufre una transición entre sus valores antes y después de la dominación de ρ_ϕ . Esta variación en los valores

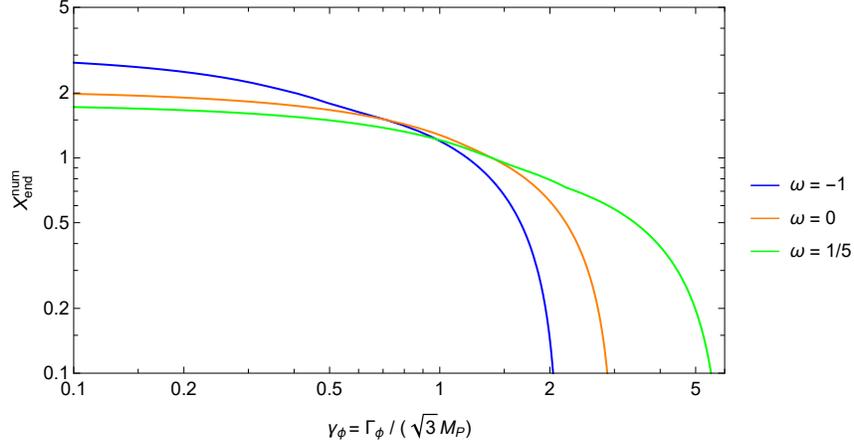


Figura 3.15: Gráfico de $x_{\text{end}}^{\text{num}}$ vs $\gamma_\phi = \Gamma_\phi / \sqrt{3} M_P$, en el que se muestra el comportamiento que sigue $x_{\text{end}}^{\text{num}}$ para los distintos valores de ω_ϕ . La curva azul representa el caso $\omega_\phi = -1$, la curva naranja $\omega_\phi = 0$, y la curva verde $\omega_\phi = 1/5$.

de H afectará directamente la evolución del número de densidad de materia oscura, de forma que la ecuación 3.3 deberá modificar el valor de su fuerza de acoplamiento para que la tasa de aniquilación produzca la abundancia de materia oscura observada de $\Omega_S h^2 = \Omega_{\text{DM}} h^2 \equiv 0,12$ [12].

Capítulo 4

Conclusiones

En esta tesina se estudió el efecto que tiene un campo ϕ sobre la evolución cosmológica en el Universo Temprano mediante distintas parametrizaciones posibles del decaimiento Γ_ϕ , el parámetro de estado ω_ϕ y los periodos de evolución de las densidades de energía presentes. Este incluye un análisis sobre su influencia en la evolución de la tasa de expansión H , y si esto tiene a la vez, repercusiones sobre alguna producción de materia, como la abundancia de materia oscura.

Asumiendo la existencia de una densidad de energía ρ_ϕ que domine por un periodo del Universo temprano luego de la inflación, es que nos enfocamos en estudiar las características que debería tener este periodo de dominación (determinar su inicio a través de x_{crit}) de ρ_ϕ , así como también las propiedades internas de esta energía, como su tasa de decaimiento Γ_ϕ y el tipo de comportamiento que tenga su materia a través de su parámetro de estado ω_ϕ . La variación de estos parámetros deben cumplir que, tras finalizado el periodo de dominación, la densidad de energía del ME se debe encontrar a una temperatura $T_{\text{end}} > 4MeV$ y así dar paso a una Nucleosíntesis Primordial exitosa, sin afectar el Modelo Cosmológico.

El estudio de la evolución de las densidades de energía, se hizo mediante el análisis de dos soluciones, una analítica y otra numérica, las cuales fueron construidas mediante el programa `Mathematica`, para luego ser comparadas.

Dentro de la comparación se halló que, por lo general, ambas soluciones coinciden para los rangos más bajos de $x_{\text{crit}}^{\text{an}}$, sin embargo, a medida que aumenta el valor de $x_{\text{crit}}^{\text{an}}$, la solución numérica comienza a tener otro comportamiento

respecto al de la solución analítica, acortándose el periodo de dominación de $\tilde{\rho}_\phi^{num}$.

Podemos concluir, que a medida que aumenta el x_{crit}^{an} , la solución analítica comienza a diferir con la numérica, encontrando valores de x_{crit}^{an} que no permiten un periodo de dominación de ρ_ϕ . Este aumento cada vez mayor de x_{crit}^{an} llega a un punto en que si bien el decaimiento γ_ϕ es suficientemente alto para incrementar la densidad de energía de $\tilde{\rho}_\phi$, la solución de $\tilde{\rho}_\phi$ no atraviesa por ningún periodo de dominación sobre $\tilde{\rho}_R$. Para valores aún más altos de x_{crit}^{an} , la tasa de decaimiento γ_ϕ deja de ser suficiente para lograr el incremento de energía necesario de $\tilde{\rho}_R$. Por tanto, la solución analítica no sirve como buena aproximación para cada valor de x_{crit}^{an} , ya que este tendrá un límite superior para hallar una solución numérica que cumpla con la evolución cosmológica esperada. Esta conducta fue observada para cada parámetro de estado ω_ϕ , donde la variación de este influyó en mantener a la solución numérica con un comportamiento similar al de la solución analítica, donde por ejemplo, un $x_{crit}^{an} = 0,1$ para $\omega_\phi = -1$, se tiene una evolución de las energías que atraviesan por un periodo de dominación de ρ_ϕ . Sin embargo, para $x_{crit}^{an} = 0,1$ con un parámetro de estado $\omega_\phi = 1/5$, no existe ningún periodo de dominación para $\tilde{\rho}_\phi$.

Se analizó también el efecto de la evolución de las densidades de energías analíticas y numéricas, sobre la tasa de expansión del Universo, y se compararon estas situaciones con las del caso estándar. Se encontró que tanto para la solución analítica como la numérica, la tasa de expansión continúa su valor esperado en la cosmología estándar tras el decaimiento de $\tilde{\rho}_\phi$. Sin embargo, a medida que el incremento de energía que sufre $\tilde{\rho}_\phi$ se hace más pequeño, la solución analítica de la tasa de expansión presenta valores más altos que la tasa de expansión estándar, indicando que puede ser una mala aproximación durante un rango de valores de x_{crit}^{an} .

Como trabajos a futuro, se podrían estudiar los rangos del x_{crit}^{an} para restringir la densidad de energía ρ_ϕ que pueda haber antes del recalentamiento.

De esta forma, se logró estudiar distintas características que podrían presentarse en la evolución del Universo Temprano bajo la presencia de un campo ϕ que puede alterar la tasa de expansión por un periodo de tiempo, tal que no afecte las predicciones del modelo cosmológico estándar, pero sí ampliar

restricciones para objetos de estudio como la materia oscura.

Bibliografía

- [1] A.D. Linde, *Particle physics and inflationary cosmology*, vol. 5 (1990), [[hep-th/0503203](#)].
- [2] D. Baumann and H.V. Peiris, *Cosmological inflation: Theory and observations*, *Adv. Sci. Lett.* **2** (2009) 105 [[0810.3022](#)].
- [3] PARTICLE DATA GROUP collaboration, *Review of Particle Physics*, *PTEP* **2022** (2022) 083C01.
- [4] J. Arnau Romeu, *Derivation of friedman equations*, *Treballs Finals de Grau (TFG) - Física* (jun-2014) .
- [5] E.W. Kolb and M.S. Turner, *The early universe*, *Nature* **294** (1981) 521.
- [6] F. De Bernardis, L. Pagano and A. Melchiorri, *New constraints on the reheating temperature of the universe after wmap-5*, *Astropart. Phys.* **30** (2008) 192.
- [7] N. Bernal, C. Cosme, T. Tenkanen and V. Vaskonen, *Scalar singlet dark matter in non-standard cosmologies*, *Eur. Phys. J. C* **79** (2019) 30 [[1806.11122](#)].
- [8] M. Drees, F. Hajkarim and E.R. Schmitz, *The effects of qcd equation of state on the relic density of wimp dark matter*, *JCAP* **1506** (2015) no.06, **025** **2015** (2015) 025 [[1503.03513](#)].
- [9] M. Kawasaki, K. Kohri and N. Sugiyama, *Mev scale reheating temperature and thermalization of neutrino background*, *Phys. Rev. D* **62** (2000) 023506 [[astro-ph/0002127](#)].

- [10] S. Hannestad, *What is the lowest possible reheating temperature?*, *Phys. Rev. D* **70** (2004) 043506 [[astro-ph/0403291](#)].
- [11] K. Ichikawa, M. Kawasaki and F. Takahashi, *The oscillation effects on thermalization of the neutrinos in the universe with low reheating temperature*, *Phys. Rev. D* **72** (2005) 043522 [[astro-ph/0505395](#)].
- [12] PLANCK collaboration, *Planck 2015 cosmological results*, *AIP Conf. Proc.* **1743** (2016) 050014.

Anexo

A continuación se adjuntan las diversas funciones del programa Mathematica usadas para hallar cada una de nuestras soluciones.

```
In[593]:= (*Solución analítica de la evolución de las densidades de energía  $\rho\phi$  y  $\rho R$ *)
 $\rho R[x_, xcrit_, \alpha_] = \text{If}[x \geq 1, 1/x^4, 1/x^4/F // . F \rightarrow xcrit^{(\alpha-4)}]$ 
 $\rho\phi[x_, \alpha_] = \text{If}[x \geq 1, 0, 1/x^\alpha]$ 
 $\rho Rest[x_, \alpha_] = 1/x^4$ 
Out[593]=  $\text{If}\left[x \geq 1, \frac{1}{x^4}, \frac{1}{x^4 F} // . F \rightarrow xcrit^{\alpha-4}\right]$ 
Out[594]=  $\text{If}\left[x \geq 1, 0, \frac{1}{x^\alpha}\right]$ 
Out[595]=  $\frac{1}{x^4}$ 
```

Figura 4.1: Solución analítica de la evolución de las densidades de energía $\tilde{\rho}_\phi$ y $\tilde{\rho}_R$

```

= (*Solución Numérica*)

=  $\omega = -1$ ;
 $\alpha = 3 * (1 + \omega)$ ;
 $x_{crit} = 0.5$ ;
 $x_{min} = 0.001 * x_{crit}$ ; (*0.001*xcrit*)
 $x_{max} = 1000$ ; (*1000*)
 $\gamma\phi = 1.45386$ ; (*0.31377 para xcrit 0.005 o 0.0005 *)
 $\rho\phi_{xmin} = \rho\phi[x_{min}, \alpha]$ ;
 $\rho R_{xmin} = \rho R[x_{min}, x_{crit}, \alpha]$ ;
Hub =  $(\rho\phi n[x] + \rho R n[x])^{(1/2)}$ ;
Hubest =  $(\rho Rest[x])^{(1/2)}$ ;
EQ1 := D[ $\rho\phi n[x] * x^\alpha, x$ ] * Hub /  $x^{(\alpha - 1)}$  ==  $-\gamma\phi \rho\phi n[x]$ ;
|deriva
EQ2 := D[ $\rho R n[x] x^4, x$ ] * Hub /  $x^3$  ==  $+\gamma\phi \rho\phi n[x]$ ;
|deriva
AA = NDSolve[{EQ1, EQ2,  $\rho R n[x_{min}] == \rho R_{xmin}$ ,
|resolveror diferencial numérico
 $\rho\phi n[x_{min}] == \rho\phi_{xmin}$ }, { $\rho\phi n[x], \rho R n[x]$ },
{x, xmin, xmax}, MaxStepFraction  $\rightarrow 1/100000$ ];
|máximo paso como fracción
G $\phi$ [x_] = Evaluate[ $\rho\phi n[x] /. AA$ ][[1]];
|evalúa
(*Son los puntos de la función numérica hechos función*)
GR[x_] = Evaluate[ $\rho R n[x] /. AA$ ][[1]];
|evalúa
GR[xmax] * xmax^4
Evaluate[AA[[1, 2, 1]] /. AA] /. x  $\rightarrow$  xmax
|evalúa

```

Figura 4.2: Solución numérica de la evolución de las densidades de energía $\tilde{\rho}_\phi$ y $\tilde{\rho}_R$

```

(*Función Modulo para hallar  $X_{\text{CRIT}}^{\text{NUM}}$  y  $X_{\text{END}}^{\text{NUM}}$  de  $\rho\phi$  y
  $\rho_R$  normalizados, según los parámetros  $\gamma\phi$ ,  $x_{\text{CRIT}}^{\text{AN}}$ ,
 y  $\omega\phi$  escogidos*)

funciongamma[ $\gamma e\_ , xc\_ , \omega e\_ ] := Module[
  |módulo
  { $\alpha$ , xmin, xmax,  $\rho\phi$ xmin,  $\rho_R$ xmin, Hub, EQ1, EQ2, AA,
   G $\phi$ , GR, Outval, x,  $\rho\phi$ n,  $\rho_R$ n, XTemporal, XRHn, Xcritn,
   Xfoo},
   $\alpha = 3 * (1 + \omega e)$ ;
  xmin = 0.001 * xc;
  xmax = 1000;
   $\rho\phi$ xmin =  $\rho\phi$ [xmin,  $\alpha$ ];
   $\rho_R$ xmin =  $\rho_R$ [xmin, xc,  $\alpha$ ];
  Hub = ( $\rho\phi$ n[x] +  $\rho_R$ n[x])^(1/2);
  EQ1 := D[ $\rho\phi$ n[x] * x $^\alpha$ , x] * Hub / x $^{\alpha - 1}$  == - $\gamma e$   $\rho\phi$ n[x];
  |deriva
  EQ2 := D[ $\rho_R$ n[x] x $^4$ , x] * Hub / x $^3$  == + $\gamma e$   $\rho\phi$ n[x];
  |deriva
  AA = NDSolve[{EQ1, EQ2,  $\rho_R$ n[xmin] ==  $\rho_R$ xmin,
  |resolvidor diferencial numérico
    $\rho\phi$ n[xmin] ==  $\rho\phi$ xmin}, { $\rho\phi$ n[x],  $\rho_R$ n[x]}, {x, xmin, xmax},
  {MaxStepFraction  $\rightarrow$  1 / 100000, MaxSteps  $\rightarrow$  1000000}];
  |máximo paso como fracción |máximo de pasos
  GR[XTemporal_] =
  Flatten[Evaluate[AA[[1, 2, 1]] /. AA]][[1]] //.
  |aplana |evalúa
  AA[[1, 2, 1, 1]]  $\rightarrow$  XTemporal;$ 
```

Figura 4.3: Función Modulo del programa Mathematica para hallar $x_{\text{crit}}^{\text{num}}$ y $x_{\text{end}}^{\text{num}}$ de $\tilde{\rho}_\phi$ y $\tilde{\rho}_R$, según los parámetros γ_ϕ , $x_{\text{crit}}^{\text{an}}$ y ω_ϕ escogidos.

```

Gmin = 0.8; (*Mínimo valor para el decaimiento  $\gamma\phi$ *)
Gmax = 3; (* Máximo valor posible para el decaimiento  $\gamma\phi$  PL:si*)
Steps = 100;
Ifun =
  Interpolation[Table[{funciongamma[g, 0.5, -1][[1]], g},
    {g, Gmin, Gmax, (Gmax - Gmin) / Steps}]]
(*LogLogPlot[{1.0,funciongamma[g, 0.1, -1],
  funciongamma[g, 0.01, -1]},{g, Gmin,Gmax},PlotPoints->10]
Ifun[1.0]*)

Ifun[1.0] (*Busca dentro de la interpolación,
el valor del decaimiento  $\gamma\phi$  que me entregue un  $x^4\tilde{\rho}_R = 1.0$ *)

```

Figura 4.4: Interpolación de la tabla γ_ϕ vs $x^4\tilde{\rho}_R$ para hallar el valor del decaimiento que nos entregue la evolución requerida.

```

(*Interpolación para obtener la función  $X_{\text{END}}^{\text{NUM}}$  vs  $\gamma\phi$ *)

Gamas1 = {0.313776, 0.353331, 0.504477, 0.621733, 0.8165}; (* $\omega=-1$ *)
RH1 = {2.21158, 2.1089, 1.7742, 1.5981, 1.3923};
Gamas2 = {1.13269, 1.13588, 1.14969, 1.16658, 1.3089, 1.50262};
RH2 = {1.1732, 1.1707, 1.1599, 1.1467, 1.0474, 0.9297}; (* $\omega=0$ *)
Gamas3 = {1.20361, 1.26221, 1.3035, 1.4726, 1.6010, 2.2132, 2.7889};
RH3 = {1.0944, 1.06112, 1.03907, 0.9590, 0.9072, 0.7278, 0.6181};
GVrh1 =
  Interpolation[Transpose[{Gamas1, RH1}], InterpolationOrder → 1];
  |interpolación |transposición |orden de interpolación
GVrh2 =
  Interpolation[Transpose[{Gamas2, RH2}], InterpolationOrder → 1];
  |interpolación |transposición |orden de interpolación
GVrh3 =
  Interpolation[Transpose[{Gamas3, RH3}], InterpolationOrder → 1];
  |interpolación |transposición |orden de interpolación

```

Figura 4.5: Interpolación de las listas de decaimiento γ_ϕ y $x_{\text{end}}^{\text{num}}$ y hallar sus evoluciones en $\omega_\phi = -1, 0$, y $1/5$.